Computergrafik 2: Fourier-Transformation

Prof. Dr. Michael Rohs, Dipl.-Inform. Sven Kratz

michael.rohs@ifi.lmu.de

MHCI Lab, LMU München

Folien teilweise von Andreas Butz, sowie von Klaus D. Tönnies
(Grundlagen der Bildverarbeitung. Pearson Studium, 2005)

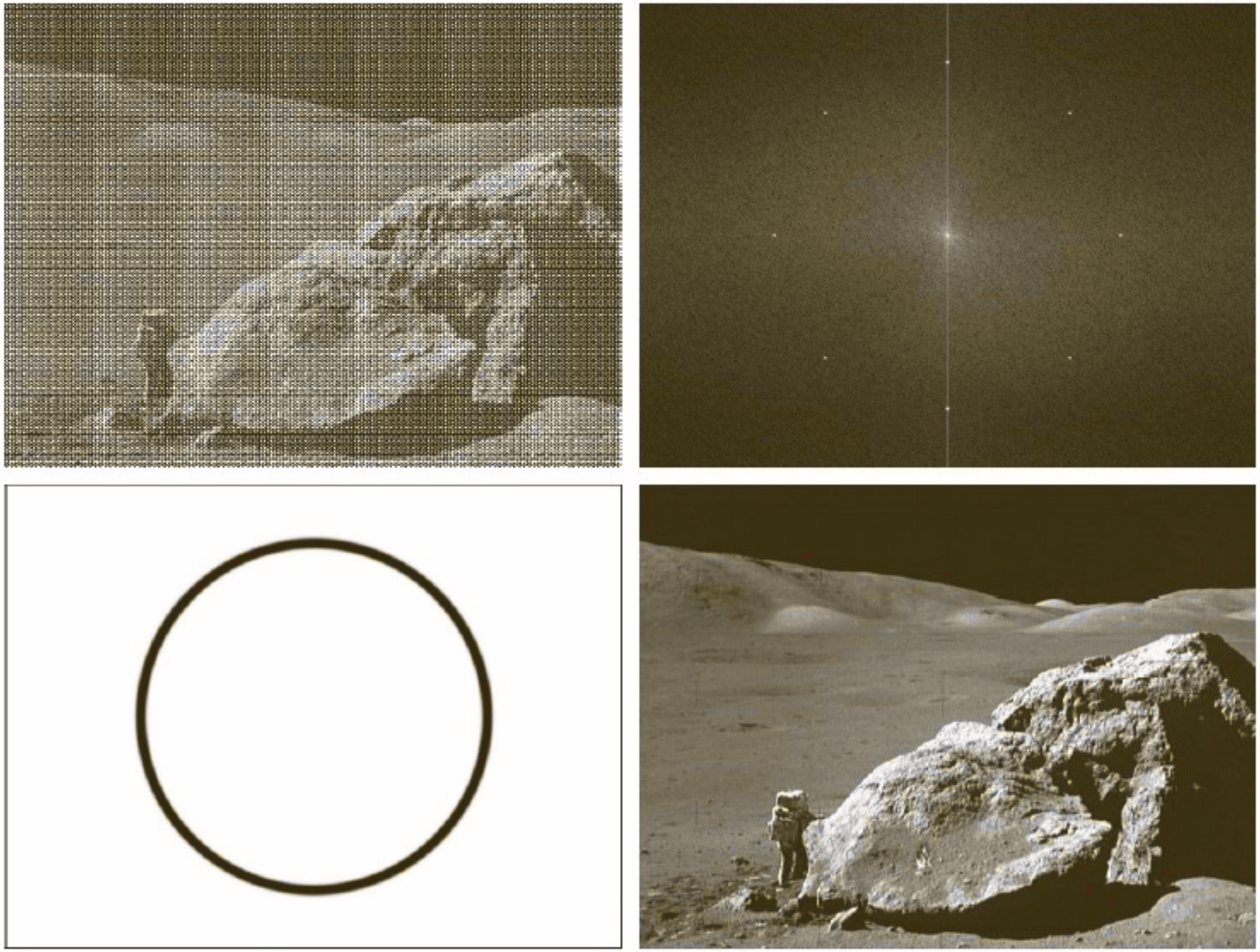
Themen heute

- Fourier-Transformation
  - Grundidee
  - Konstruktion der Fourier-Basis
  - Phase und Amplitude
  - Eigenschaften der FT
  - Konvolution und Korrelation im Frequenzraum
  - Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Motivation

- Manche Operationen sind im Ortsraum (d.h. auf den Pixeln des Bildes) schwer
  - Herausfiltern bestimmter Frequenzen
  - Beseitigung störender Details
  - Konvolution, Korrelation
  - Frequenzraum als „Labor“ zur Entwicklung von Filtern
- Idee: übertrage Bild in einen Raum, in dem diese Operationen leichter sind
  - z.B. Zerlegung des Bildes in Frequenzen
  - Rückweg muss möglich sein!
  - Verschiedene Möglichkeiten, gleiches Prinzip

Beispiel: Artefakte entfernen



a b
c d

FIGURE 2.40
(a) Image corrupted by sinusoidal interference. (b) Magnitude of the Fourier transform showing the bursts of energy responsible for the interference. (c) Mask used to eliminate the energy bursts. (d) Result of computing the inverse of the modified Fourier transform. (Original image courtesy of NASA.)

Motivation

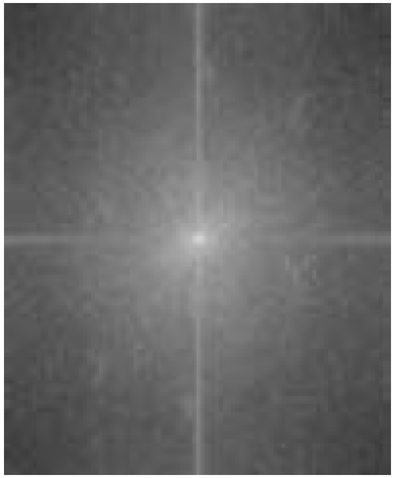
- Bisher: Darstellung des Bildes im **Ortsraum** durch den Grauwert an einem bestimmten Ort
- Jetzt: Darstellung im **Frequenzraum** durch cos und sin Funktionen verschiedener Frequenzen
- Eindeutige und vollständige Darstellung in beiden Räumen

Ortsraum

Fourier-Transformation

inverse Fourier-Transformation

Frequenzraum



Fourier

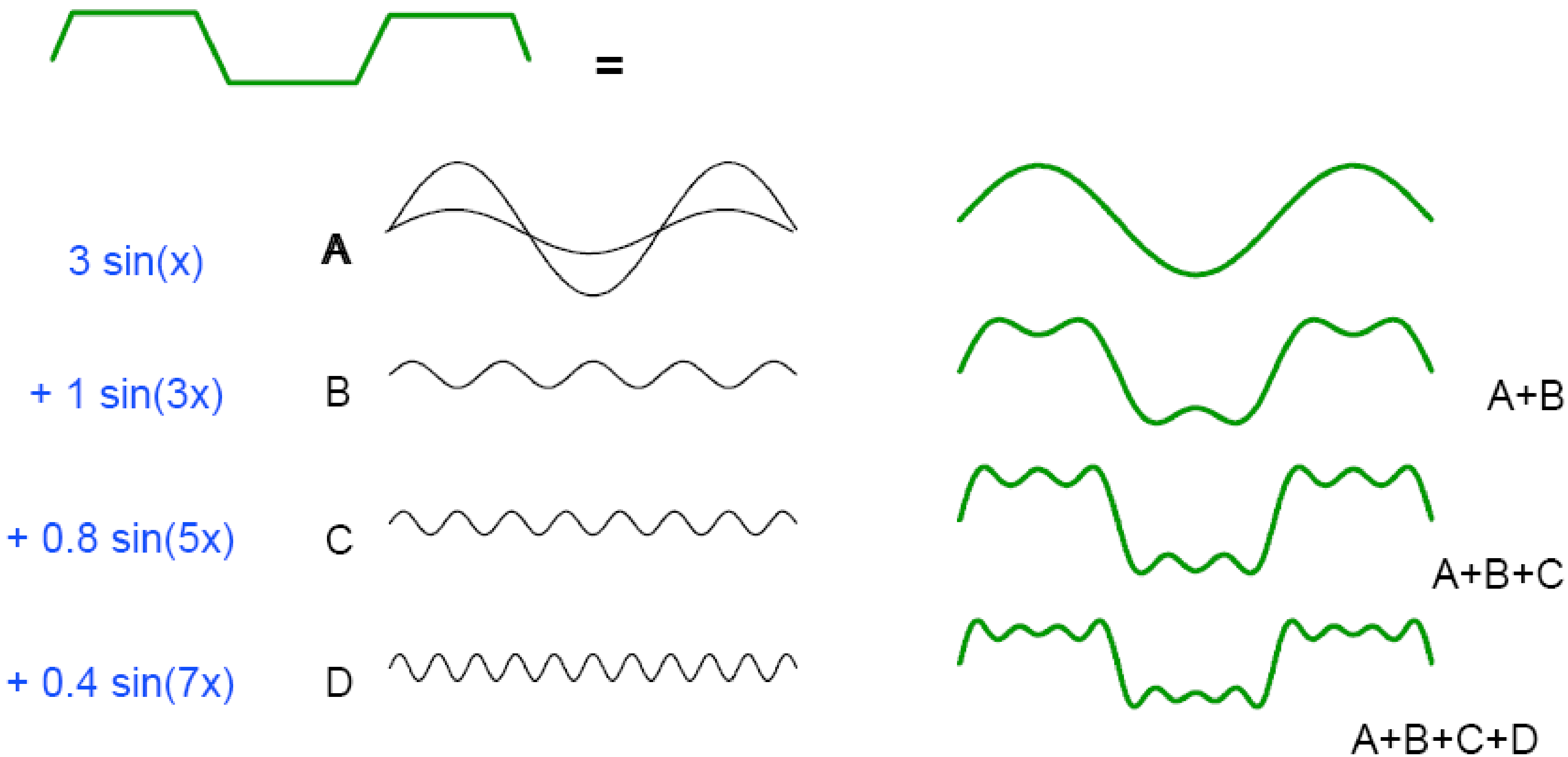
- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)
- Französischer Physiker und Mathematiker
- Erfinder der Fourier-Transformation

Johann Bernoulli
↑ Advisor
Leonhard Euler
↑ Advisor
Joseph Louis Lagrange
↑ Advisor
Jean Baptiste Joseph Fourier

Quelle: www.genealogy.ams.org

Fourier-Transformation: Grundidee

Beschreibe beliebige Funktion als gewichtete Summe periodischer Grundfunktionen (Basisfunktionen) mit unterschiedlicher Frequenz

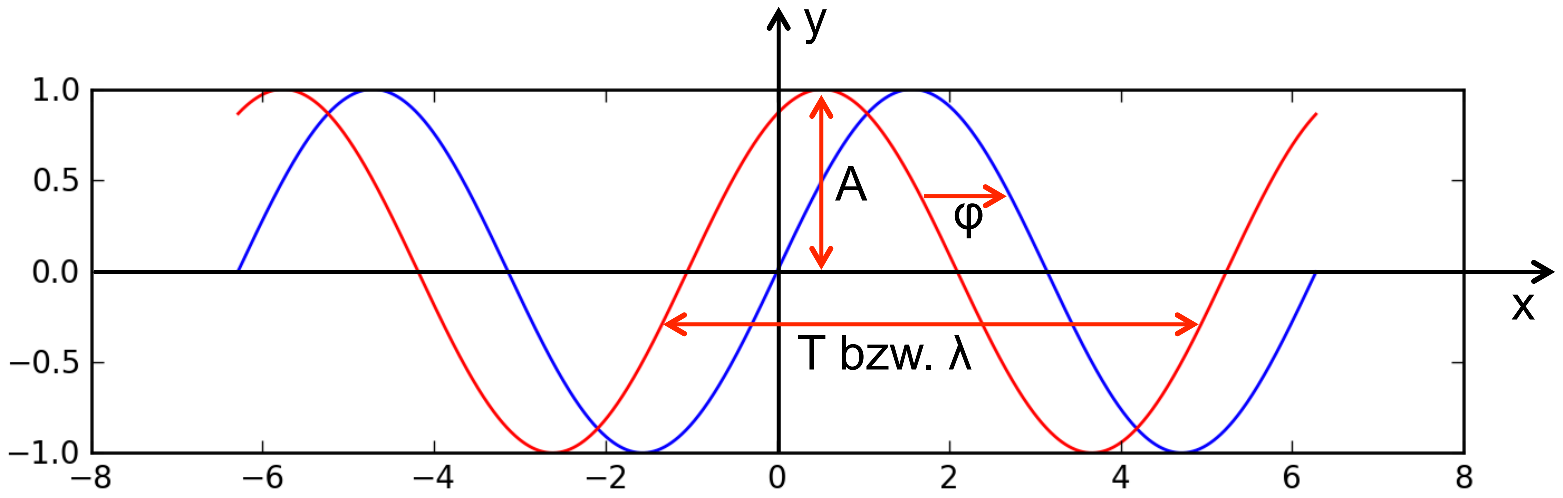


Parameter Periodischer Grundfunktionen

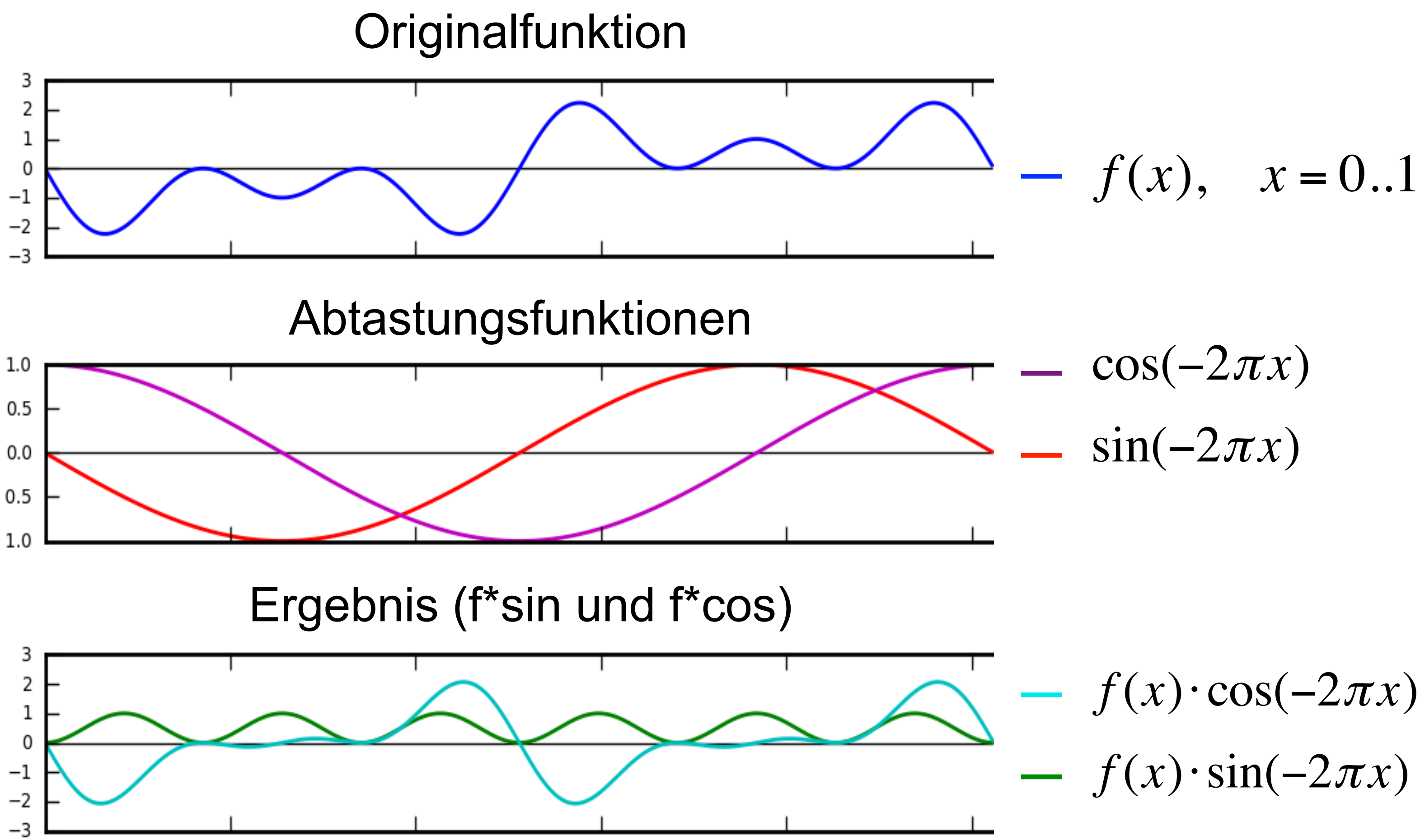
$$y(x) = A\sin(2\pi f\, x + \varphi)$$

- A **Amplitude**: Intensität des Signals
- φ **Phase**: Verschiebung zum Ursprung
- **Frequenz** zeitlich f(t)
  T Periodendauer [s]
  f Frequenz f = 1/T [1/s=Hz]
  ω Kreisfrequenz ω=2πf

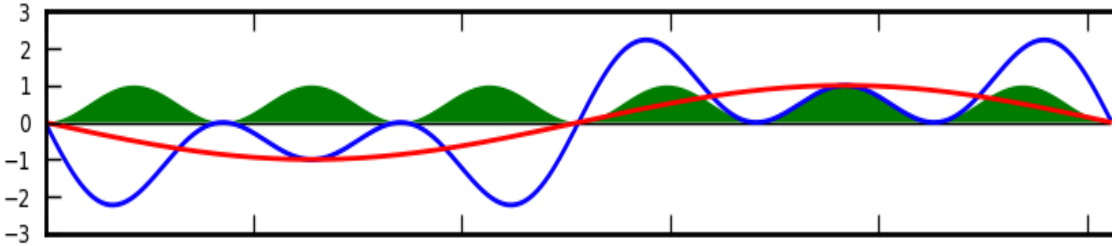
  Frequenz räumlich f(x)
  λ Wellenlänge [m]
  f Raumfrequenz f=1/λ [1/m]
  k Wellenzahl k = 2π/λ



Funktion mit sin und cos multiplizieren



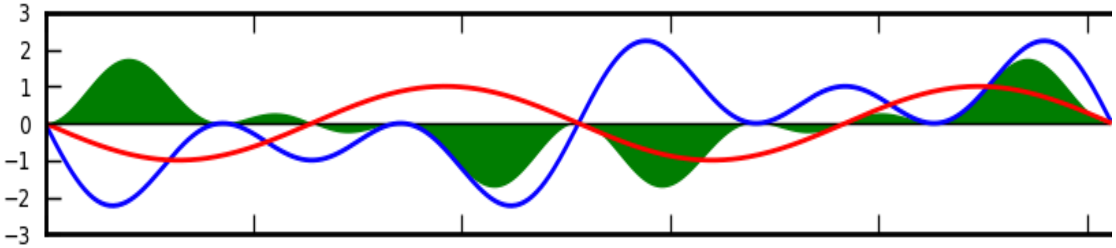
— $f(x)$



— $\sin(-2\pi x)$

— $f(x)\cdot\sin(-2\pi x)$

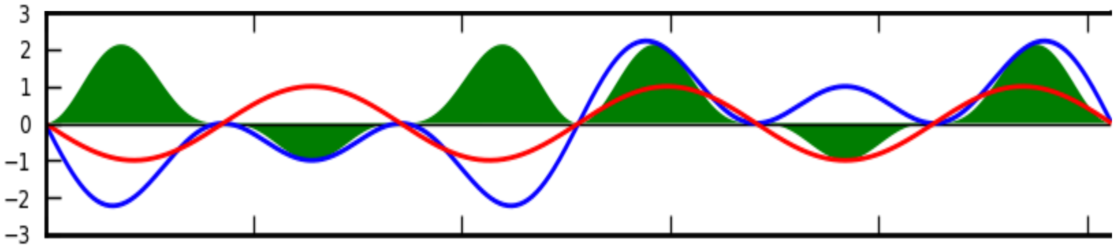
$$F_{\sin}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\ldots)\,dx > 0$$



— $\sin(-2\pi 2x)$

— $f(x)\cdot\sin(-2\pi 2x)$

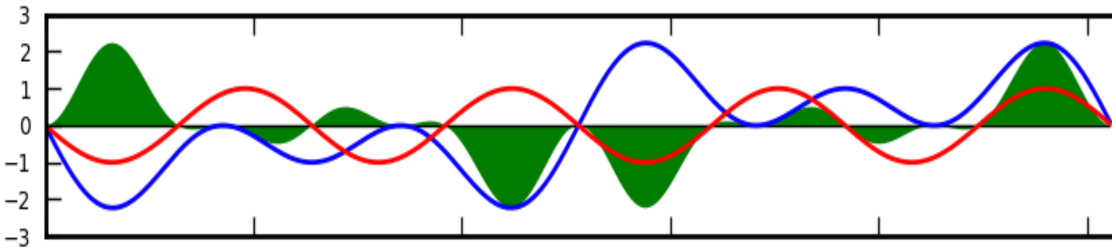
$$F_{\sin}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\ldots)\,dx = 0$$



— $\sin(-2\pi 3x)$

— $f(x)\cdot\sin(-2\pi 3x)$

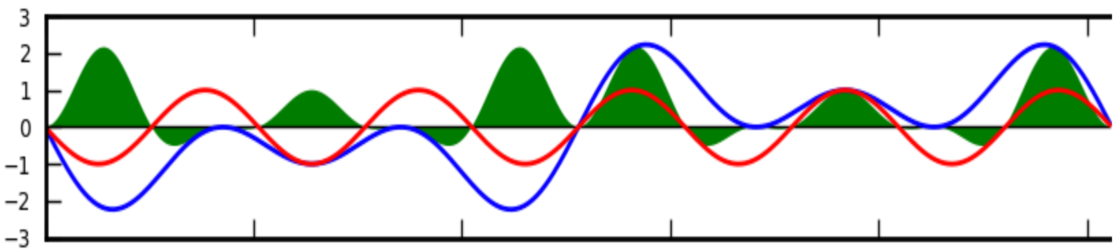
$$F_{\sin}(3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\ldots)\,dx > 0$$



— $\sin(-2\pi 4x)$

— $f(x)\cdot\sin(-2\pi 4x)$

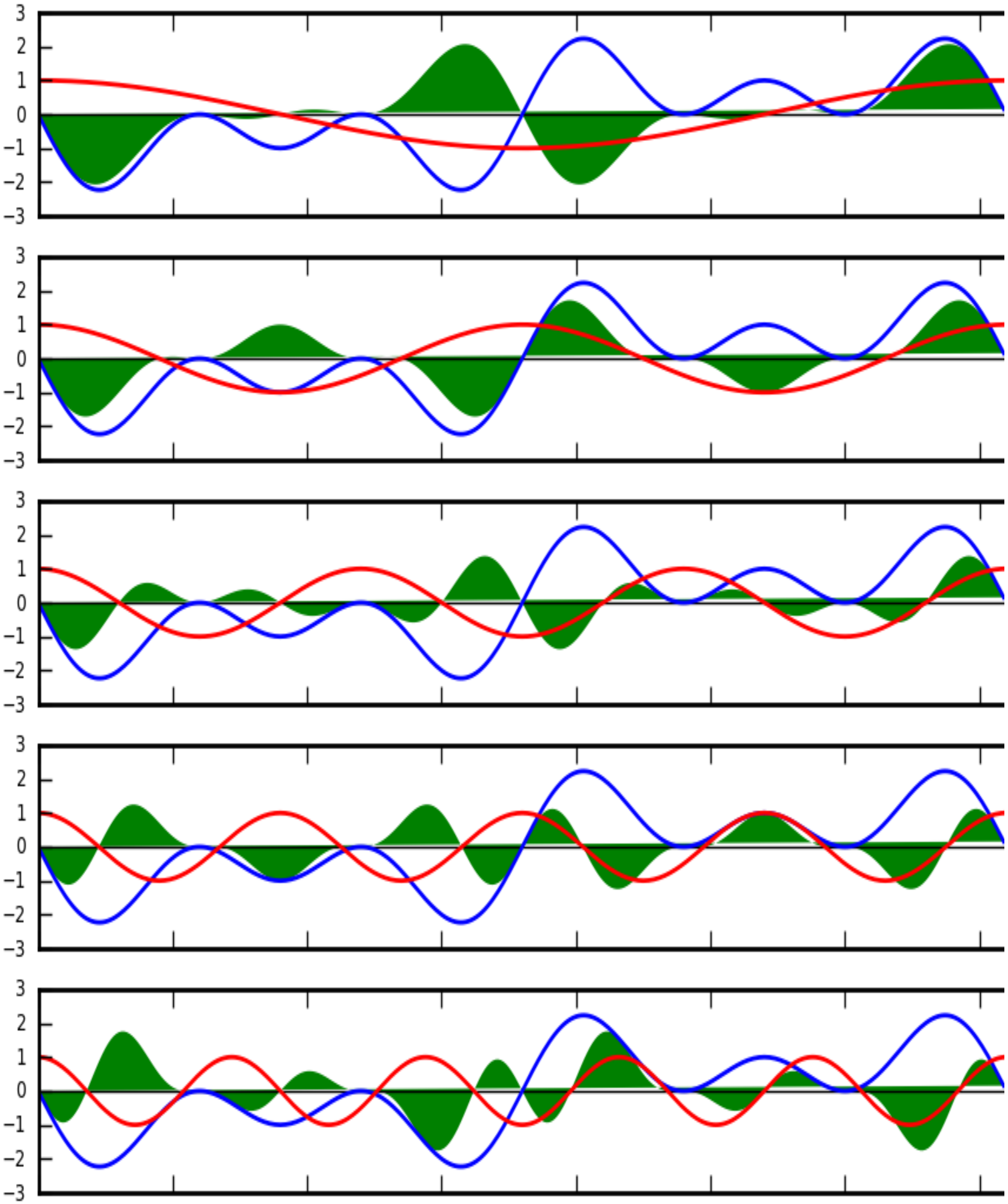
$$F_{\sin}(4) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\ldots)\,dx = 0$$



— $\sin(-2\pi 5x)$

— $f(x)\cdot\sin(-2\pi 5x)$

$$F_{\sin}(5) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\ldots)\,dx > 0$$



$f(x)$

$\cos(-2\pi x)$

$f(x)\cdot\cos(-2\pi x)$

$F_{\cos}(1)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos(\ldots)\,dx=0$

$\cos(-2\pi 2x)$

$f(x)\cdot\cos(-2\pi 2x)$

$F_{\cos}(2)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos(\ldots)\,dx=0$

$\cos(-2\pi 3x)$

$f(x)\cdot\cos(-2\pi 3x)$

$F_{\cos}(3)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos(\ldots)\,dx=0$

$\cos(-2\pi 4x)$

$f(x)\cdot\cos(-2\pi 4x)$

$F_{\cos}(4)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos(\ldots)\,dx=0$

$\cos(-2\pi 5x)$

$f(x)\cdot\cos(-2\pi 5x)$

$F_{\cos}(5)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos(\ldots)\,dx=0$

Fouriers Theorem

Jede beliebige periodische Funktion lässt sich darstellen als Summe von sin und cos Funktionen unterschiedlicher Frequenzen.

- Ist die Funktion nicht periodisch, aber auf einen bestimmten Definitionsbereich beschränkt, so kann man diesen Bereich einfach kopieren (periodisch fortsetzen) und hat damit wieder eine periodische Funktion.
- Die Zeilen und Spalten eines Bildes kann man als nichtperiodische diskrete Funktionen auffassen. Man kann also auch ein Bild Fourier-transformieren.

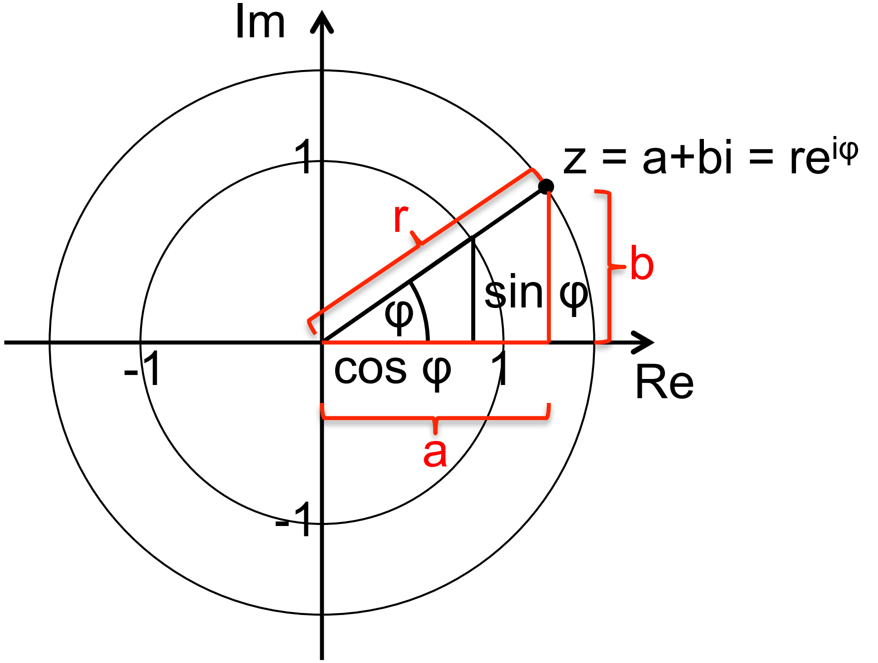
kontinuierliche Fourier-Transformation

- Transformation vom Ortsraum in den Frequenzraum

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x u} \, dx$$

- Transformation vom Frequenzraum in den Ortsraum

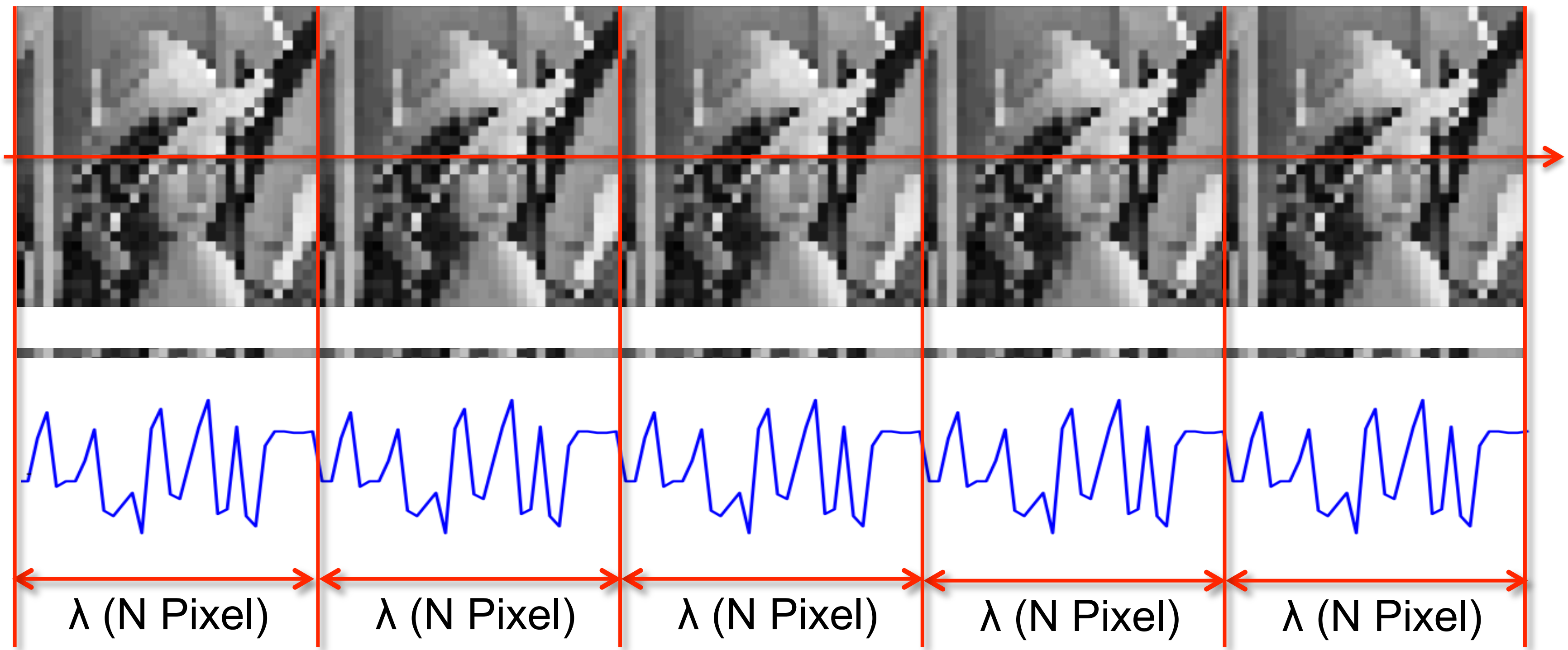
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i x u} \, du$$



Ist ein Bild eine periodische Funktion?

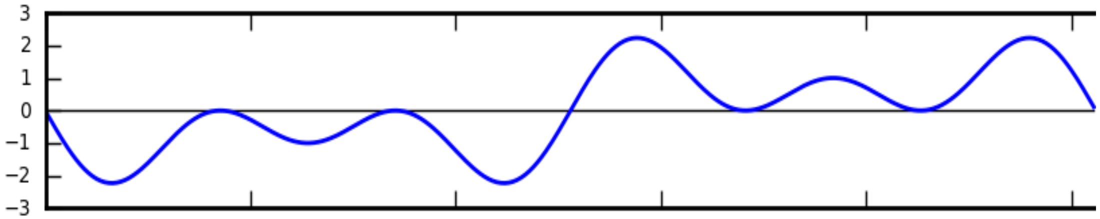
Ist ein Bild eine periodische Funktion?

- Zunächst: Betrachtung der periodischen Fortführung einer Zeile



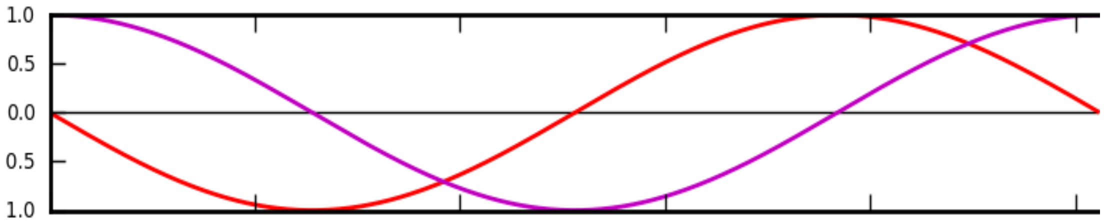
Beispiel: F(1) = ...

Originalfunktion



— $f(x), \quad x = 0..1$

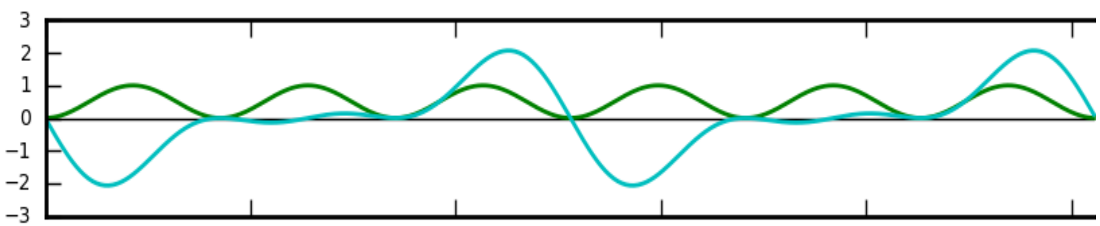
Gewichtungsfunktionen



— $real(e^{-i2\pi x}) = \cos(-2\pi x)$

— $imag(e^{-i2\pi x}) = \sin(-2\pi x)$

Ergebnis (f*sin und f*cos)



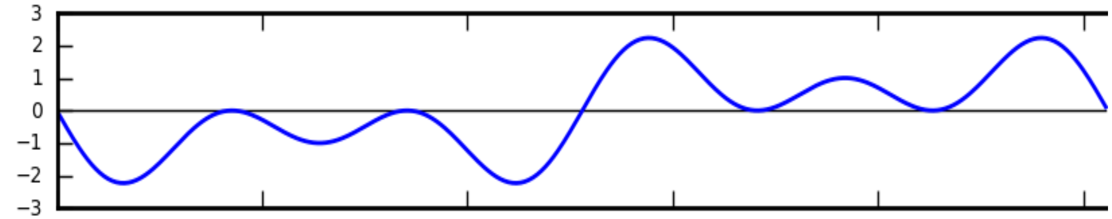
— $real(f(x) \cdot e^{-i2\pi x})$

— $imag(f(x) \cdot e^{-i2\pi x})$

$$F(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi x}\, dx, \quad |F(1)| > 0$$

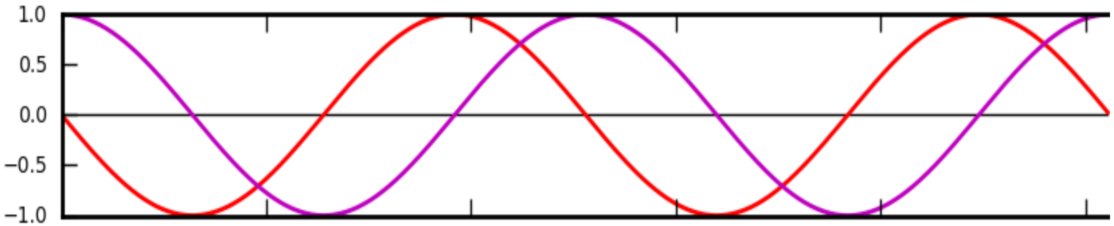
Beispiel: F(2) = ...

Originalfunktion



$f(x), \quad x = 0..1$

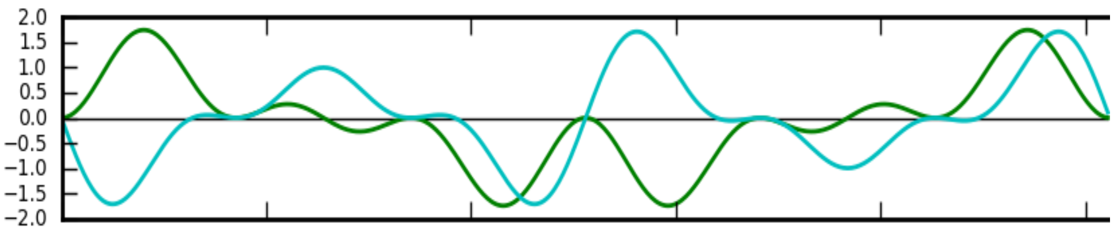
Gewichtungsfunktionen



$real(e^{-i2\pi 2x}) = \cos(-2\pi 2x)$

$imag(e^{-i2\pi 2x}) = \sin(-2\pi 2x)$

Ergebnis (f*sin und f*cos)

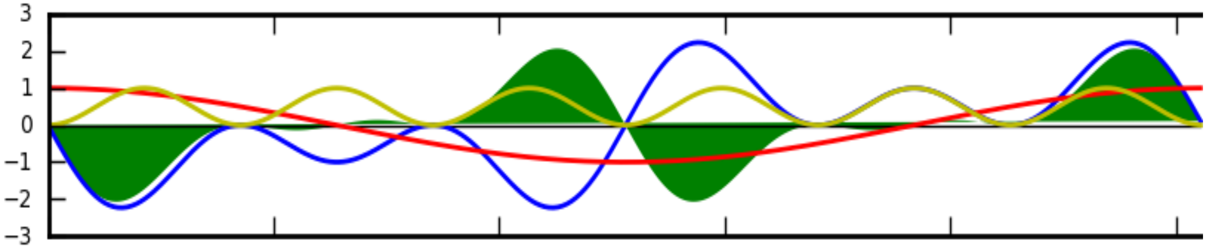


$real(f(x) \cdot e^{-i2\pi 2x})$

$imag(f(x) \cdot e^{-i2\pi 2x})$

$$F(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi 2x}\, dx, \quad |F(2)| = 0$$

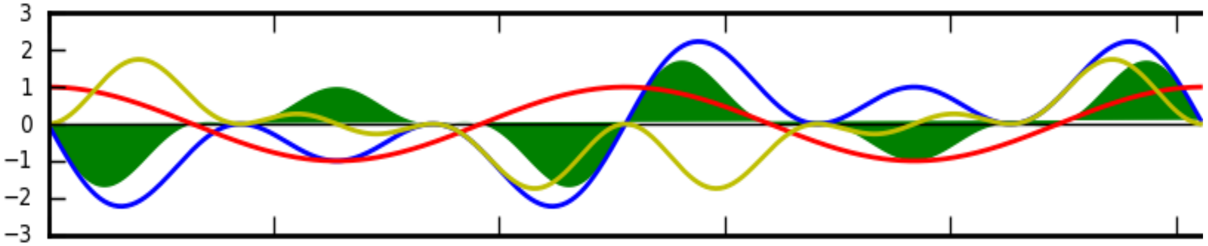
$f(x)$



$e^{-i2\pi x}$

$f(x)e^{-i2\pi x}$

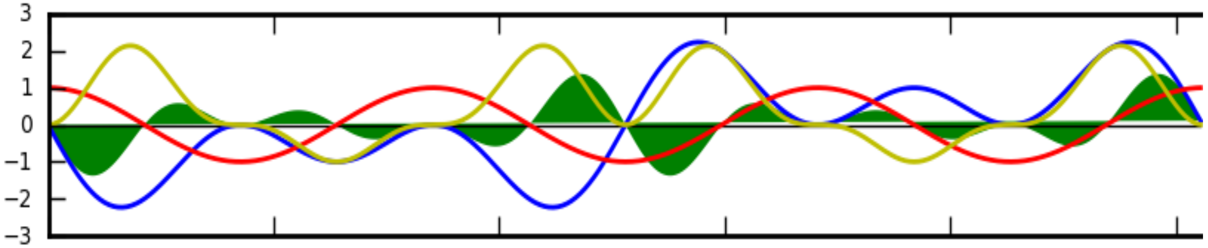
$$F(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi x}\, dx > 0$$



$e^{-i2\pi 2x}$

$f(x) \cdot e^{-i2\pi 2x}$

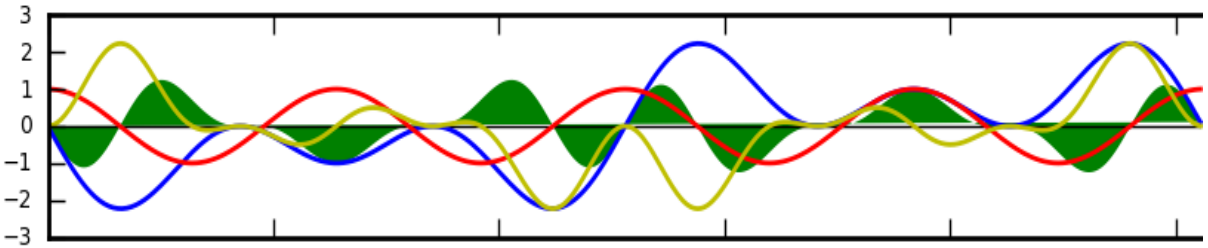
$$F(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi 2x}\, dx = 0$$



$e^{-i2\pi 3x}$

$f(x) \cdot e^{-i2\pi 3x}$

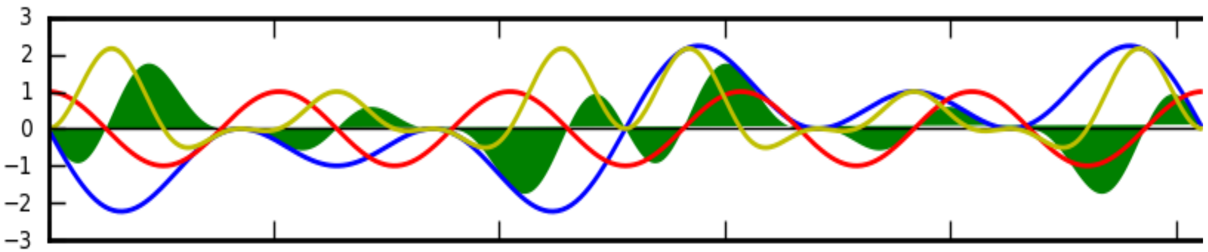
$$F(3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi 3x}\, dx > 0$$



$e^{-i2\pi 4x}$

$f(x) \cdot e^{-i2\pi 4x}$

$$F(4) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi 4x}\, dx = 0$$



$e^{-i2\pi 5x}$

$f(x) \cdot e^{-i2\pi 5x}$

$$F(5) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i2\pi 5x}\, dx > 0$$

Fourier-Transformation: Eigenschaften

- Transformation: verändert eine Funktion nicht, sondern stellt sie nur anders dar
- Transformation ist umkehrbar → inverse Fourier-Transformation
- Analog zum Basiswechsel in der Vektorrechnung

Exkurs: Vektorrechnung

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

bilden eine Basis b_1 des R^3
sind paarweise orthogonal
haben Länge 1

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

bilden ebenfalls eine Basis b_2 des R^3
sind ebenfalls paarweise orthogonal
Haben ebenfalls Länge 1

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ist orthogonal und normiert
(d.h. $M^T = M^{-1}$)
Ist Basiswechselmatrix
von b_1 nach b_2

Basiswechsel

- Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über Körper K mit Basen $B=\{b_1, \ldots, b_n\}$ und $B'=\{b'_1, \ldots, b'_n\}$
- Darstellung der Vektoren von B in B‘: $b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i'$
- Darstellung des Vektors v in B: $v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$
- Darstellung des Vektors v in B‘: $v = \sum_{i=1}^{n} x_i' b_i'$

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i' = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) b_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' b_i'$$

Basiswechsel

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i' = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) b_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' b_i'$$

- Also: $x_i' = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}$ mit $b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i'$
- in Matrix-Notation:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Anschaulich: Basisvektoren eines Bildes

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} = 1 * \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array} + 0 * \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline\end{array} + 1 * \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} + 0 * \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

bilden eine Basis des R^4
sind paarweise orthogonal
haben Länge 1

- Wahl anderer Basisvektoren ➔ Transformation mittels Basiswechsel
- Basiswechselmatrix vom Rang der Pixelanzahl

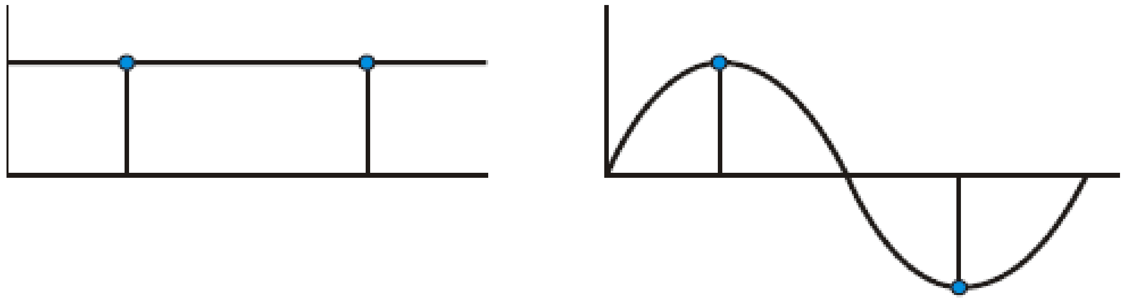
Orthogonale Funktionen

- Seien f_1 und f_2 Funktionen, die an N Stellen abgetastet sind (also N-dim. Vektoren)
- f_1 und f_2 sind orthogonal, falls gilt:

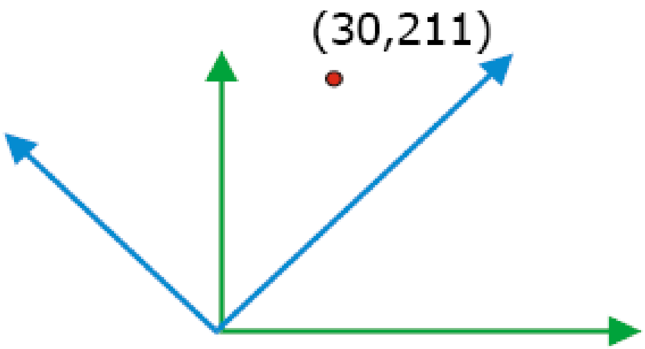
$$f_1 * f_2 = \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k) f_2(k) = 0$$

- D.h. das Skalarprodukt der zugehörigen Vektoren ist 0
- N paarweise orthogonale Funktionen $f_1 \dots f_N$ bilden damit eine orthogonale Basis des N-dim. Raums
- Transformationen zwischen orthogonalen Basen sind immer umkehrbar

Orthogonale Funktionen



Basis:
(1, 1)
(1, -1)



Transformation:

$$(30,211) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (241, -181)$$

Rücktransformation:

$$(241,-181) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = (60, 422)$$

Anmerkung:

Das Resultat der Rücktransformation muss skaliert werden, weil die Basis nicht normiert ist.

Orthogonale Funktionstransformationen

- Betrachte abgetastete Funktionen wie Vektoren
- Finde neue geeignete orthogonalen Basis
- Üblicherweise Basisfunktionen, die Bedeutung bzgl. der betrachteten Eigenschaft haben
  - Fourier-Basis: komplexe, periodische Funktionen
  - Kosinusbasis: Kosinusfunktionen
- Transformiere Bild in diese Basis $\vec{y} = A\vec{x}$
- Bearbeite es dort
- Transformiere zurück $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$

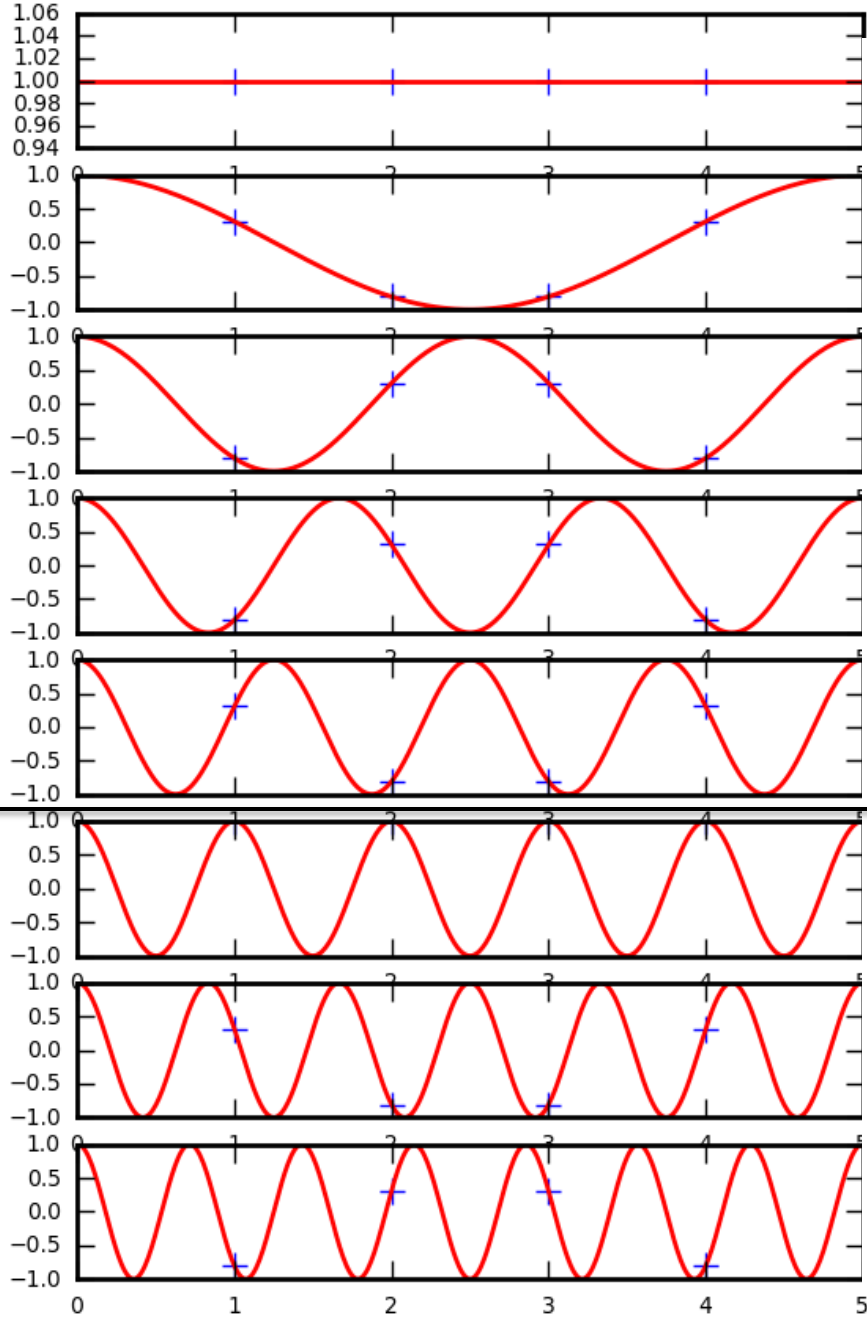
Fourierbasis (1. Versuch, nur cos)

- Ausgangspunkt: Bildzeile mit N Pixeln

- 1. Versuch: wähle N Kosinusfunktionen

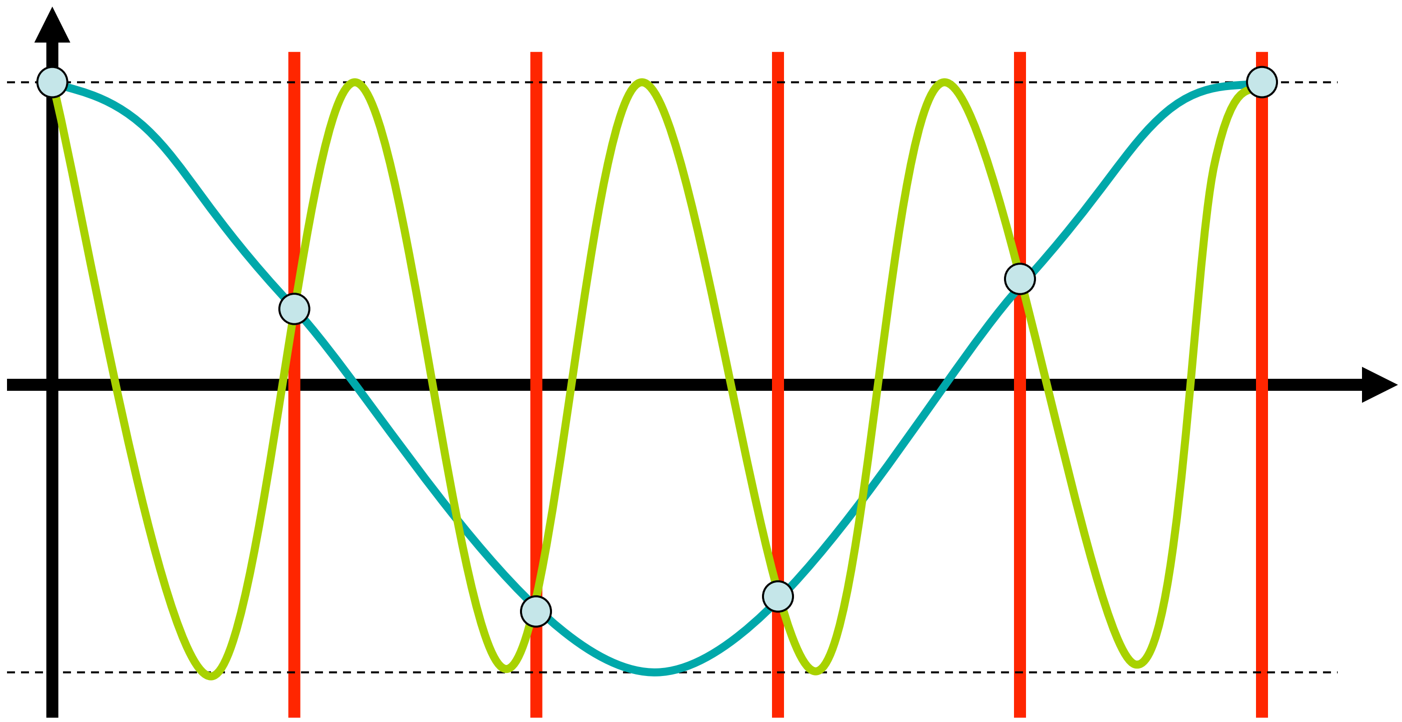
$$\cos\left(0 \cdot \frac{2\pi}{N}\right), \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{N}\right), \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{N}\right), \ldots, \cos\left((N-1) \cdot \frac{2\pi}{N}\right)$$

- Beispiel nächste Folie: N = 5
  - Problem: abgetastete Funktionswerte gleich für i=1 und i=4 sowie i = 2 und i = 3
  - also keine Basis der Dimension N = 5
  - Vektoren spannen nur 3-dim. Untervektorraum auf



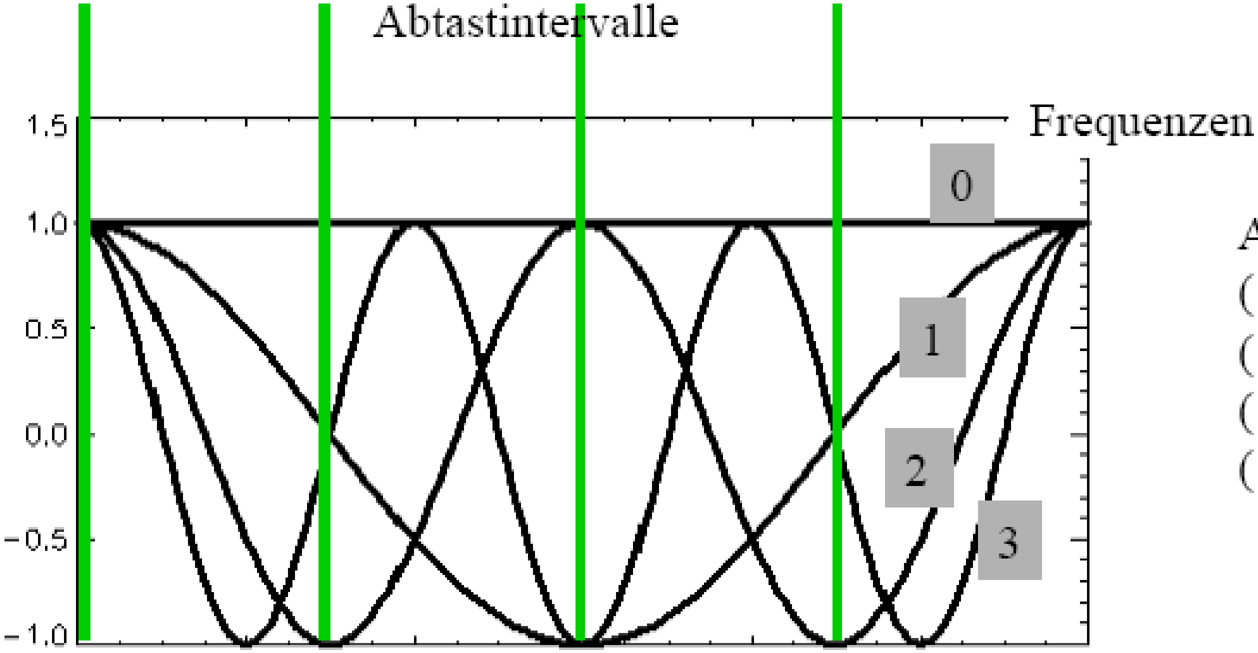
0*2π/5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1*2π/5	1.0	0.3	-0.8	-0.8	0.3
2*2π/5	1.0	-0.8	0.3	0.3	-0.8
3*2π/5	1.0	-0.8	0.3	0.3	-0.8
4*2π/5	1.0	0.3	-0.8	-0.8	0.3
5*2π/5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
6*2π/5	1.0	0.3	-0.8	-0.8	0.3
7*2π/5	1.0	-0.8	0.3	0.3	-0.8

Fourierbasis (1. Versuch, nur cos)



- N=5, $u_i = 1$, $u_j = 4 = N - u_j$
- Problem: falls $u_i = N - u_j$ ist, sind die Abtastungen gleich
- ➔ nur N/2 Funktionen verfügbar, keine Basis
- Siehe auch Shannon-Nyquist Theorem, Aliasing

Fourierbasis (1. Versuch, nur cos)



N = 4

Abgetastete Kosinuswellen:

$(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$

$(1 \quad 0 \; -1 \quad 0)$

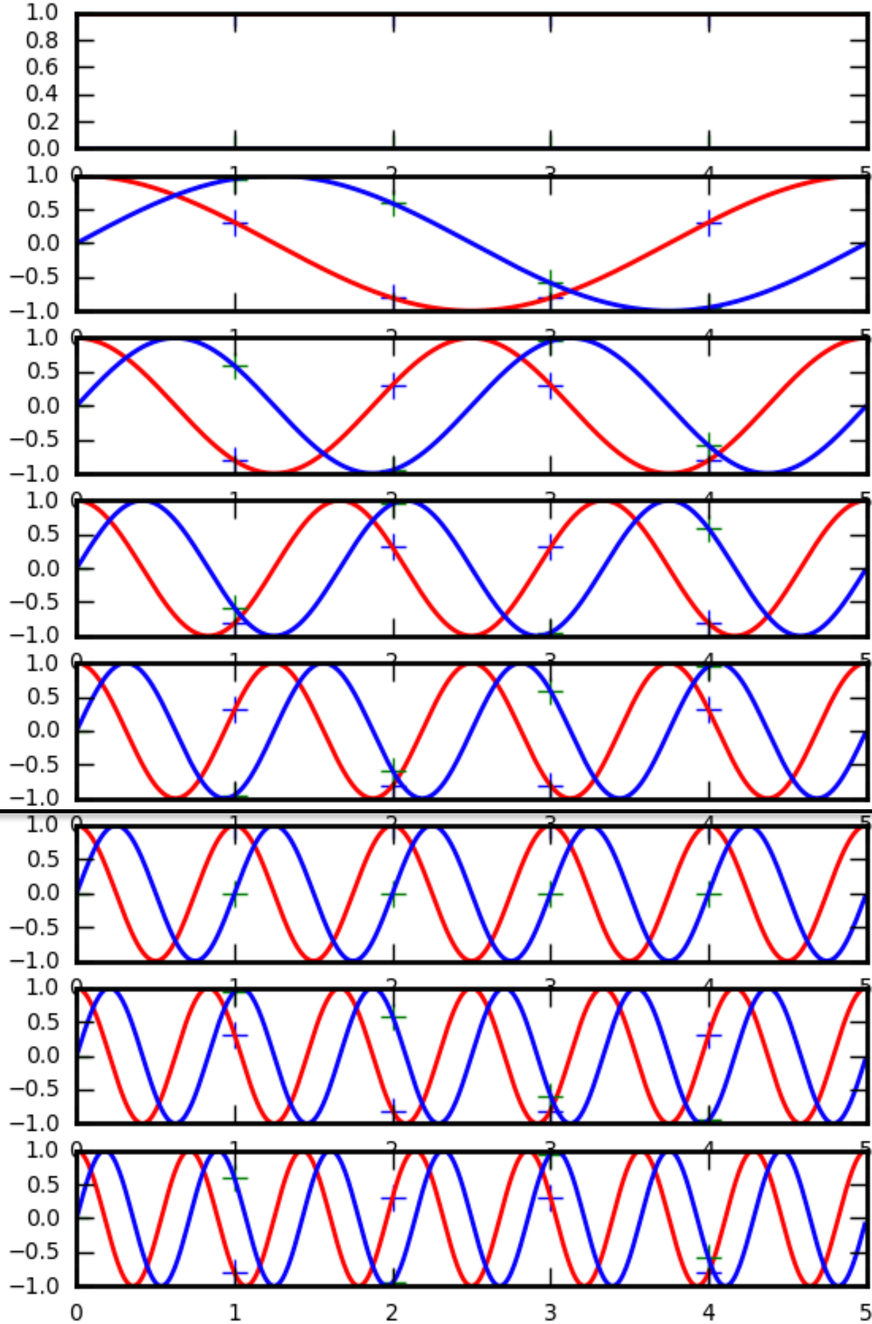
$(1 \; -1 \quad 1 \; -1)$

$(1 \quad 0 \; -1 \quad 0)$

Lösungen:

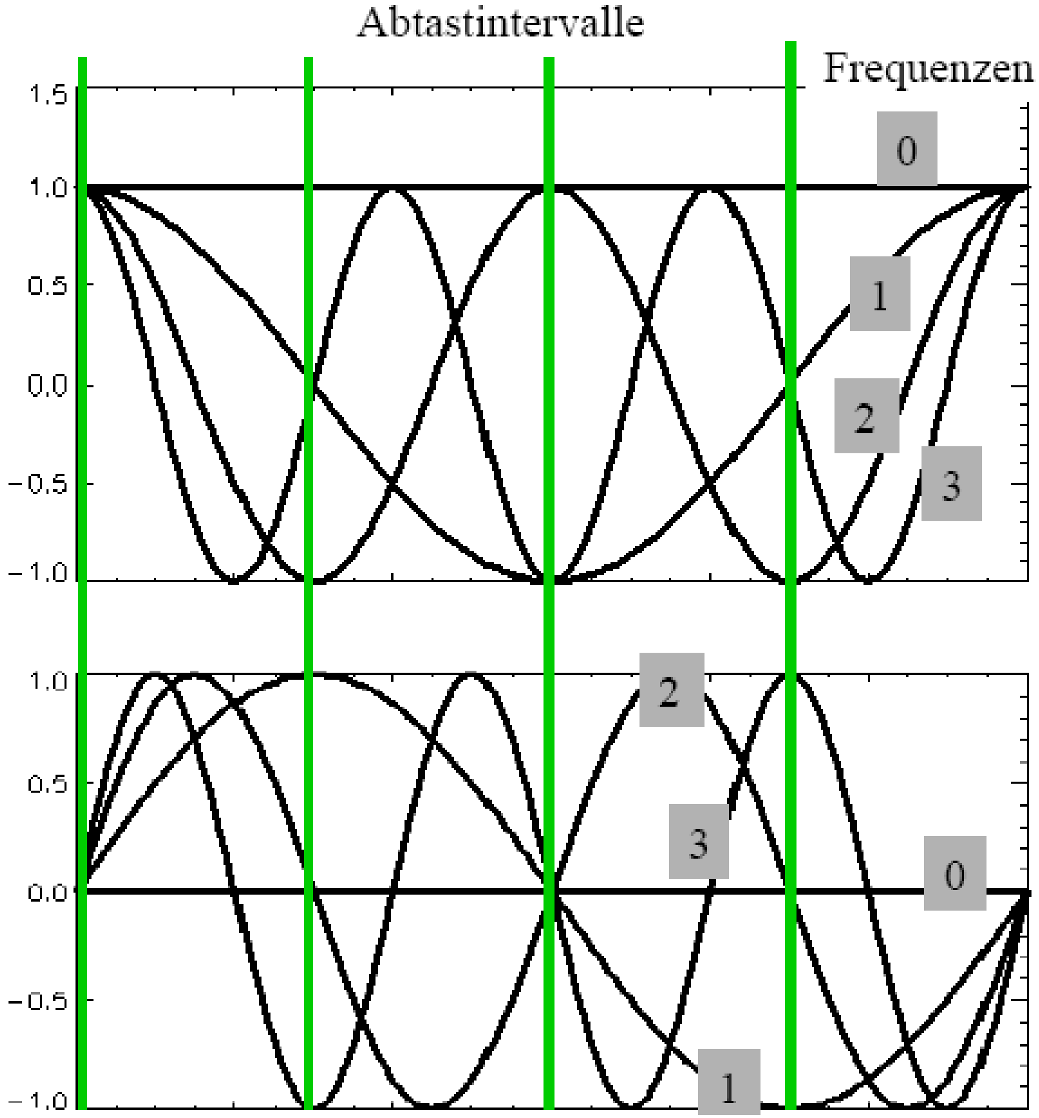
– frequenzverschobene Perioden (DCT).

– komplexe periodische Funktionen (FT).



$0*2\pi/5$	cos:	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	sin:	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$1*2\pi/5$	cos:	1.0	0.3	-0.8	-0.8	0.3
	sin:	0.0	1.0	0.6	-0.6	-1.0
$2*2\pi/5$	cos:	1.0	-0.8	0.3	0.3	-0.8
	sin:	0.0	0.6	-1.0	1.0	-0.6
$3*2\pi/5$	cos:	1.0	-0.8	0.3	0.3	-0.8
	sin:	0.0	-0.6	1.0	-1.0	0.6
$4*2\pi/5$	cos:	1.0	0.3	-0.8	-0.8	0.3
	sin:	0.0	-1.0	-0.6	0.6	1.0
$5*2\pi/5$	cos:	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	sin:	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$6*2\pi/5$	cos:	1.0	0.3	-0.8	-0.8	0.3
	sin:	0.0	1.0	0.6	-0.6	-1.0
$7*2\pi/5$	cos:	1.0	-0.8	0.3	0.3	-0.8
	sin:	0.0	0.6	-1.0	1.0	-0.6

Basisfunktionspaare (cos, sin)



N = 4

Abgetastete Kosinuswellen:

(1 1 1 1)
(1 0 –1 0)
(1 –1 1 –1)
(1 0 –1 0)

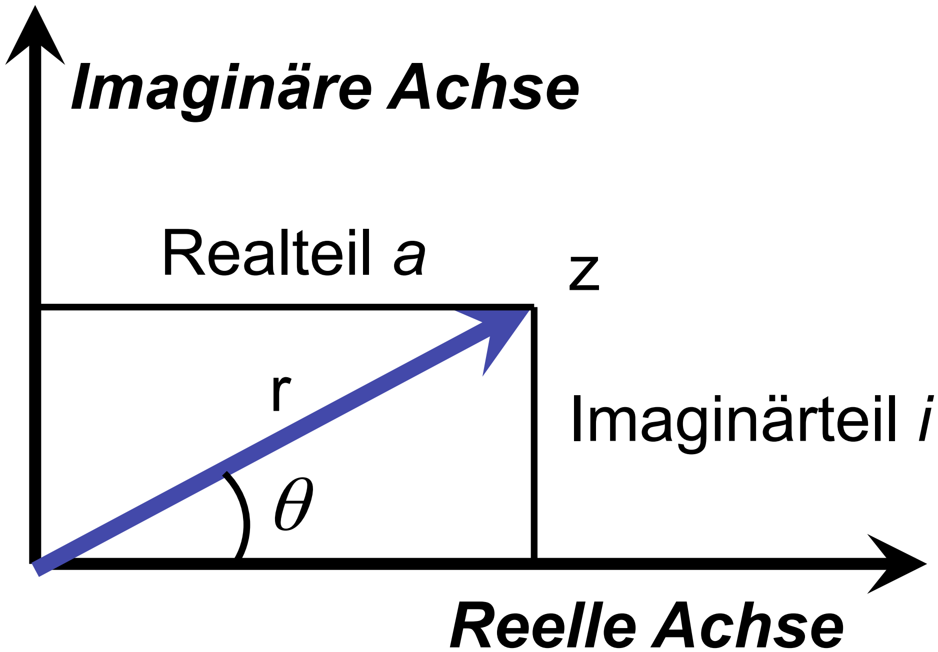
Abgetastete Sinuswellen:

(0 0 0 0)
(0 1 0 –1)
(0 0 0 0)
(0 –1 0 1)

Erinnerung: komplexe Zahlen

- Im Bereich der reellen Zahlen gibt es keine Lösung für $x^2 = -1$
  - Einführung der imaginären Zahlen
  - i: Lösung der Gleichung $x^2 = -1$
- Die Gruppe der reellen und imaginären Zahlen nennt man komplexe Zahlen
- Komplexe Zahl z: $\mathbf{z = a + i\, b}$, wobei a und b reell sind

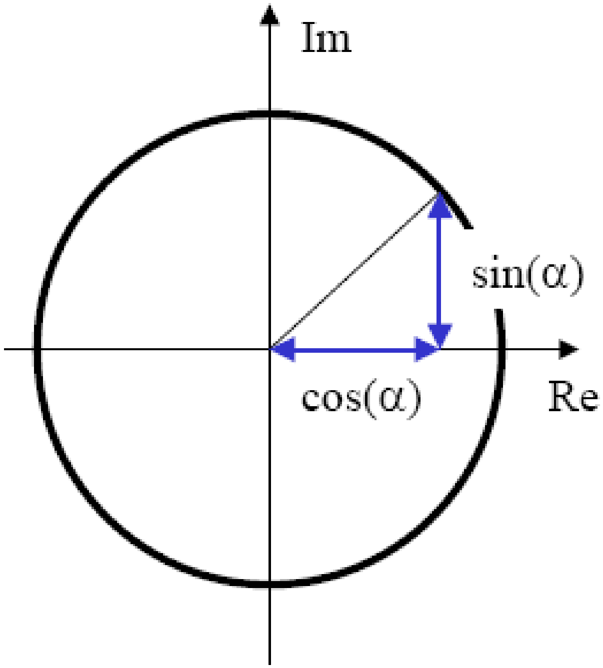
Erinnerung: komplexe Zahlen



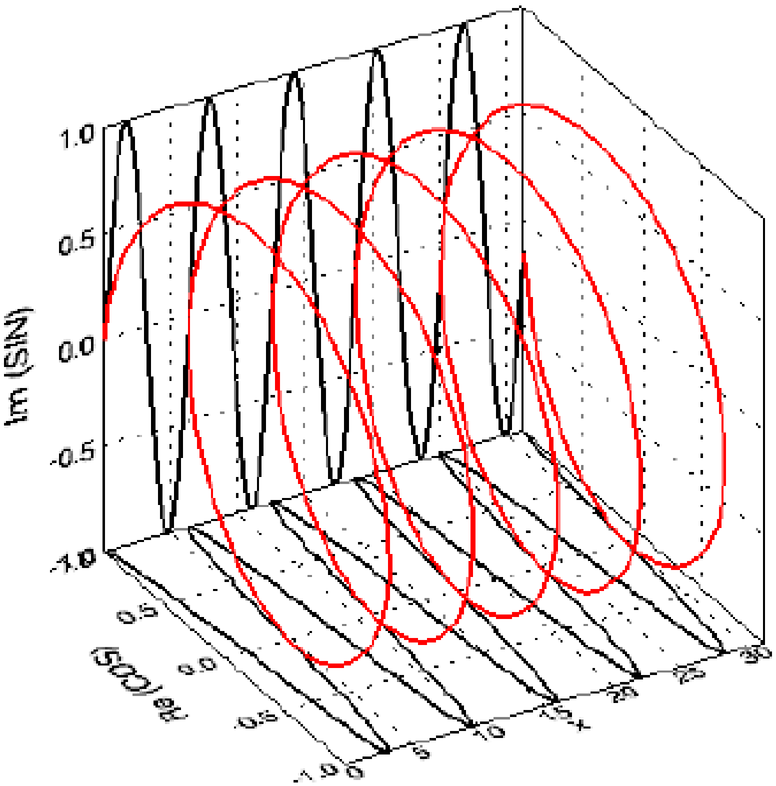
$$z = a + ib = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$$

Komplexe periodische Funktionen

$$\cos(\alpha) + i{\cdot}\sin(\alpha)$$



Alle Werte für komplexe Zahlen der Form $\cos(\alpha){+}i\sin(\alpha)$ liegen auf einem Kreis mit Abstand 1 in der komplexen Ebene.

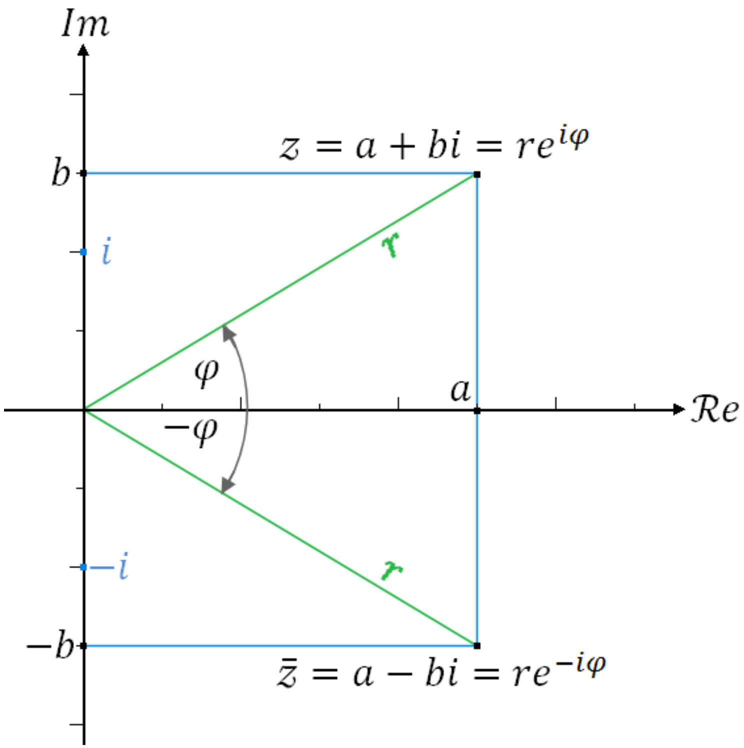


Komplexes Skalarprodukt

- Skalarprodukt zweier Vektoren mit komplexen Elementen

$$\vec{x} \bullet \vec{b} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_i^* = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\mathrm{Re}(x_i) + i\,\mathrm{Im}(x_i)\right)\left(\mathrm{Re}(y_i) - i\,\mathrm{Im}(y_i)\right)$$

- Zu x = a + ib komplex-konjugierte Zahl ist x* = a - ib



Fourierbasis (2. Versuch, komplexe Fn.)

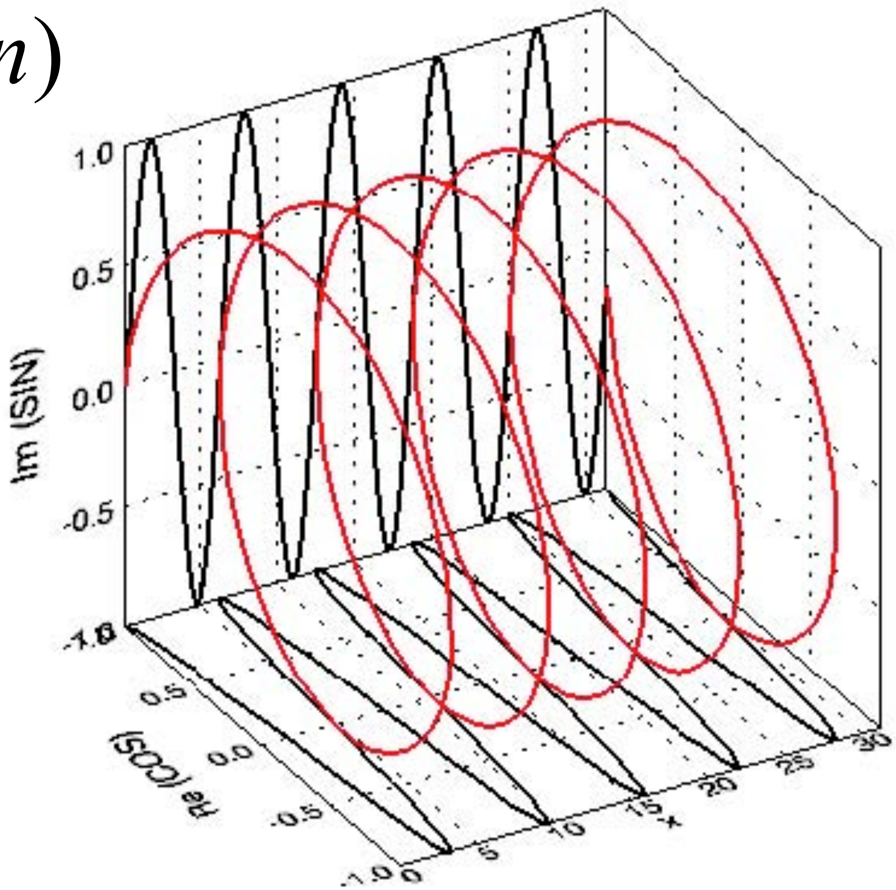
- 2. Versuch: wähle komplexe Funktionen

$$f = \cos(un) + i\sin(un)$$

- Wobei u ein ganzzahliges Vielfaches von $u_0 = 2\pi/N$

- → N verschiedene Funktionen

- Ist eine Basis



Repräsentation als Exponentialfunktion

- Taylorreihenentwicklung für Kosinus und Sinus:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

- Taylorreihenentwicklung für e^{ix}:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots$$

- Es gilt daher wegen $i^2 = -1$: $\cos(x) + i \cdot \sin(x) = e^{ix}$
- Phasenverschiebung α kann in komplexen Funktionen als Multiplikation ausgedrückt werden:

$$\cos(x+\alpha) + i\sin(x+\alpha) = e^{i(x+\alpha)} = e^{ix}e^{i\alpha}$$

1D-Basisfunktionen

Bildfunktion: $f(n)$, n=0,N-1,

1	0	1	0

also: N Basisfunktionen

$b_u(n) = \exp(i \cdot 2\pi/N \cdot n \cdot u)$, mit Frequenzen u=0,N-1

z.B. $b_0(n) = [(1,0),(1,0),\ldots,(1,0)]$

Transformation FT : $\mathbf{FT(f) = F = f \cdot B}$ (Vektor-Matrix-Schreibweise)

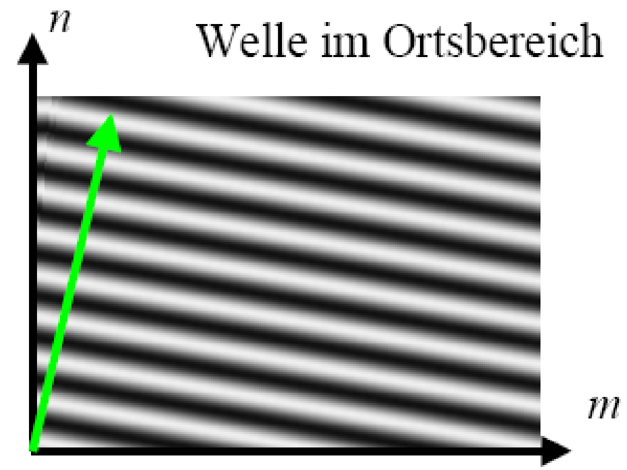
$F(u) = \sum_m f(n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi/N \cdot n \cdot u)$, für alle u=0,N-1

Rücktransformation $\mathbf{FT}^{-1}$: $\mathbf{FT}^{-1}\mathbf{(F) = F \cdot B}^{\mathrm{T}}$ (Vektor-Matrix-Schreibweise)

$f(n) = 1/N \cdot \sum_u F(u) \cdot \exp(i \cdot 2\pi/N \cdot n \cdot u)$, für alle n=0,N-1

Skalierungsfaktor, weil die Basisfunktionen nicht normiert sind.

2D-Basisfunktionen



Basisfunktionen sind Wellen (Frequenz, Richtung, Amplitude, Phase):

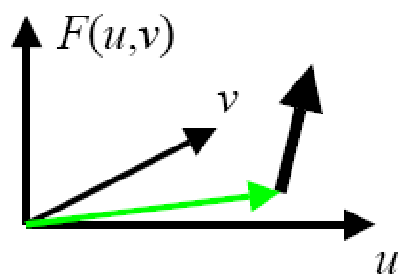
$$\exp(i \cdot 2\pi/N \cdot (mu+nv))$$

Richtung ist durch Vektor $(u\ v)$ gegeben.

Die Basisfunktionen der 2-D Fourier-transformation sind zerlegbar:

$$\exp(i \cdot 2\pi/N \cdot (mu+nv)) = \exp(i \cdot 2\pi/N \cdot m \cdot u) \cdot \exp(i \cdot 2\pi/N \cdot n \cdot v)$$

(komplexer) Funktionswert im Frequenzbereich



Frequenz: $f(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$

Richtungsvektor: $r(u,v) = \frac{1}{f(u,v)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

2D-Fourier-Transformationspaar

- Transformationspaar für Bilder der Größe M×N
- Transformation vom Ortsraum in den Frequenzraum

$$F(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \cdot \exp\left(-i2\pi \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right)$$

- Transformation vom Frequenzraum in den Ortsraum

$$f(m,n) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(u,v) \cdot \exp\left(i2\pi \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right)$$

2D-Fourier-Transformationspaar

- Transformationspaar für Bilder der Größe N×N
- Transformation vom Ortsraum in den Frequenzraum

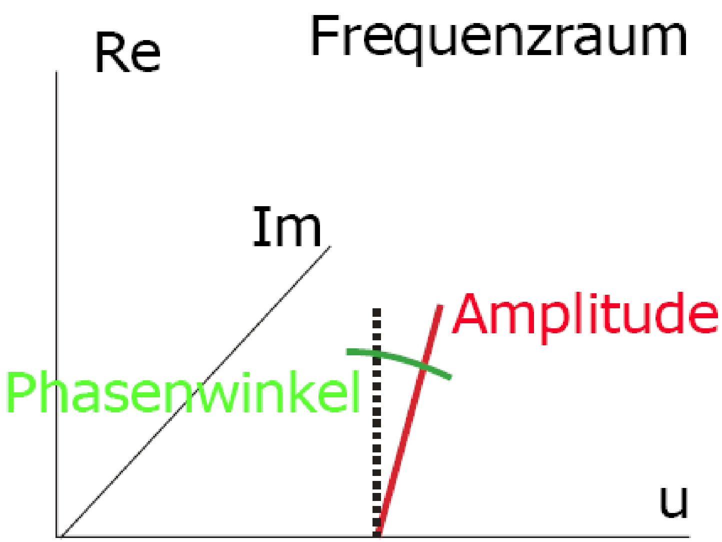
$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi}{N}(um + vn)\right)$$

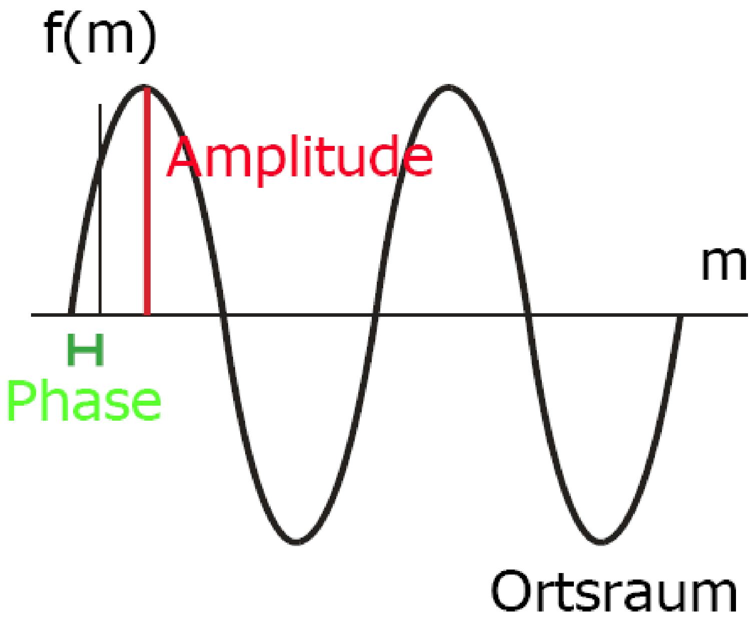
- Transformation vom Frequenzraum in den Ortsraum

$$f(m,n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(u,v) \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{N}(um + vn)\right)$$

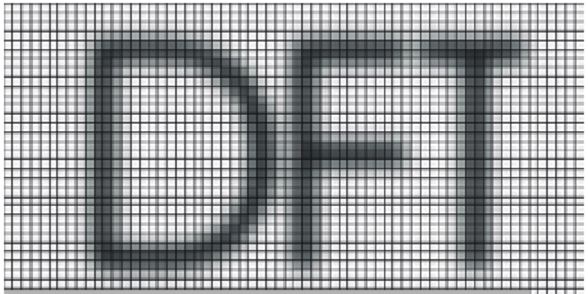
Phase und Amplitude

- Funktionswerte von $F(u,v) = a+ib$ sind komplexe Zahlen
  - Betrag eines Funktionswerts: Amplitude = $|F(u,v)| = \mathrm{sqrt}(a^2+b^2)$
  - Winkel zur reellen Achse: Phase = $\tan^{-1}(b/a)$
  - Amplitude und Phase sind Parameter der jeweiligen Basisfunktion





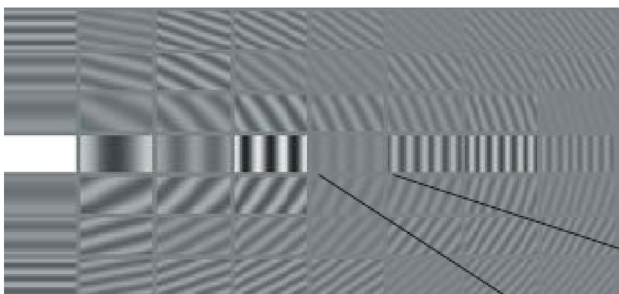
Zweidimensionale Fouriertransformation



© Jähne, Digitale Bildverarbeitung

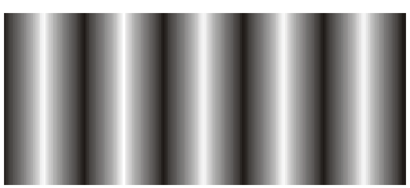
Bild $f(m,n)$

$$= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \cdot e^{i 2\pi \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$

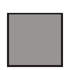


...

Beispiel einer Basisfunktion:

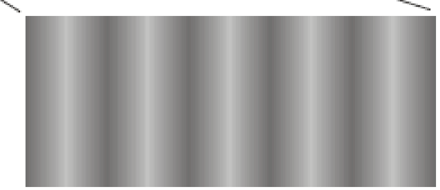


X

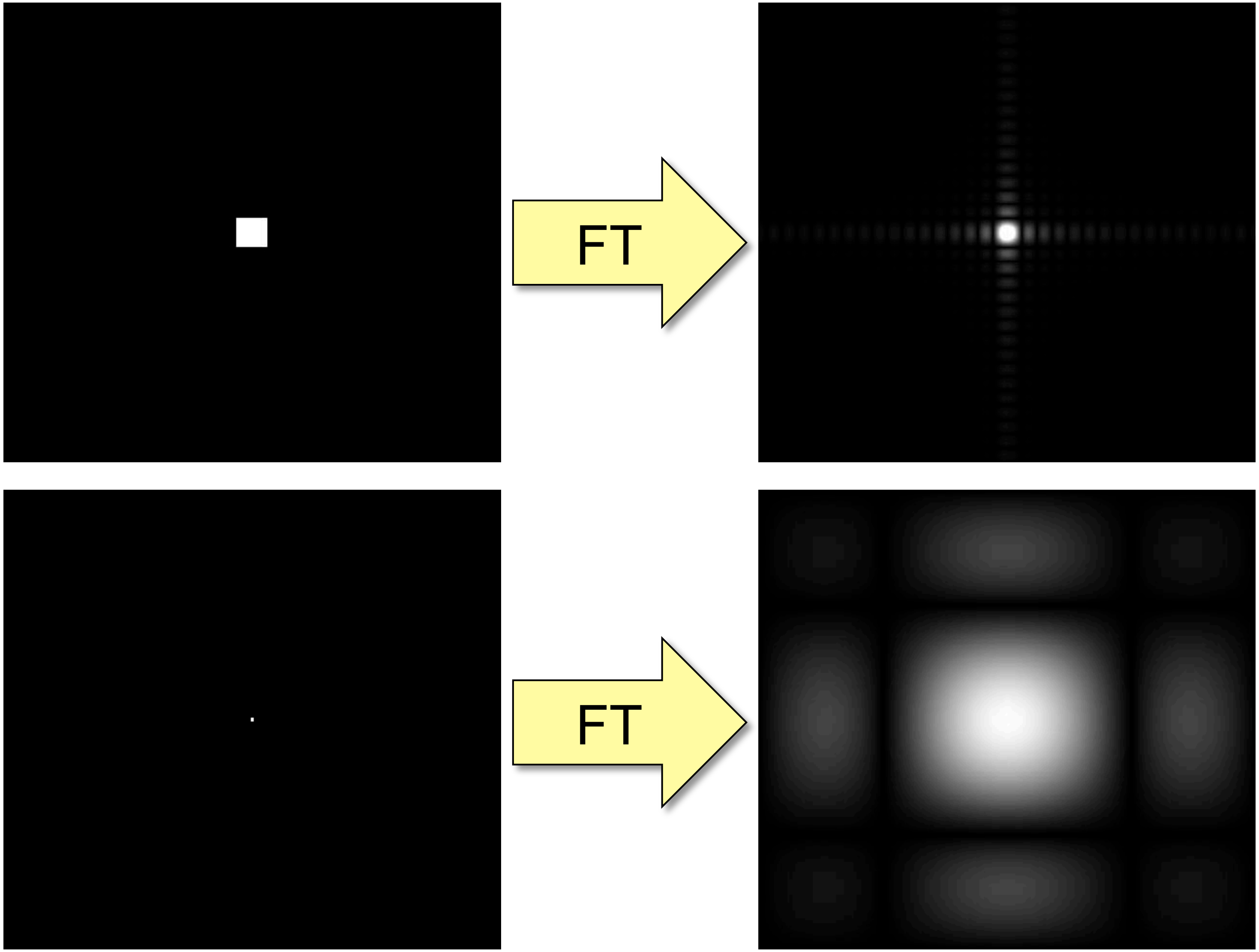


$F(4,0)$

=

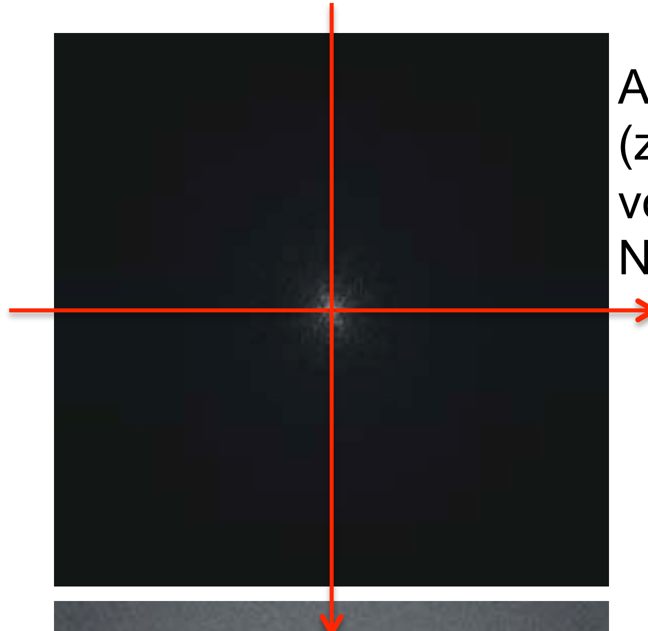


Beispiele für Amplitude



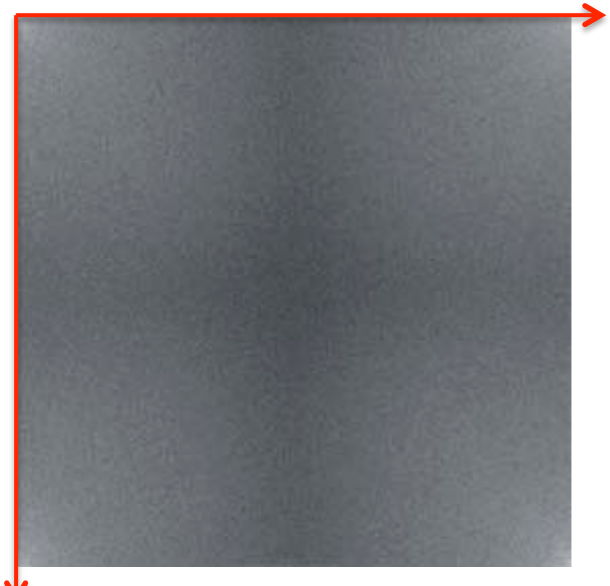
Darstellungsweise

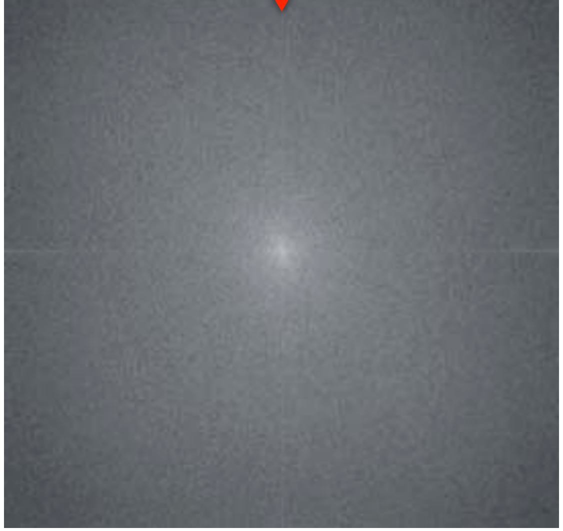
Original



Amplitude (zentriert, d.h. von –N/2 bis N/2)

Amplitude (log. Skala)

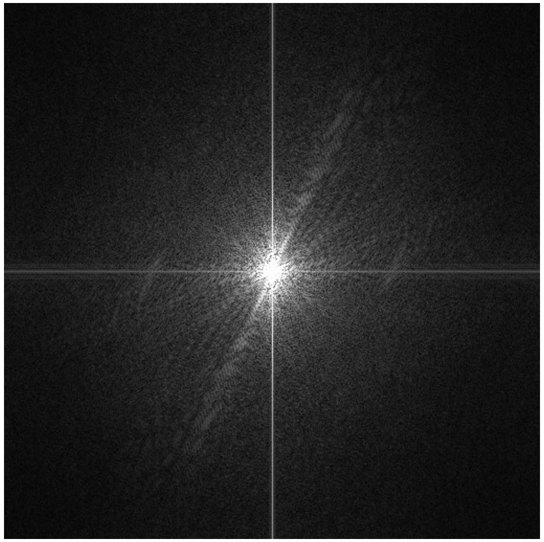




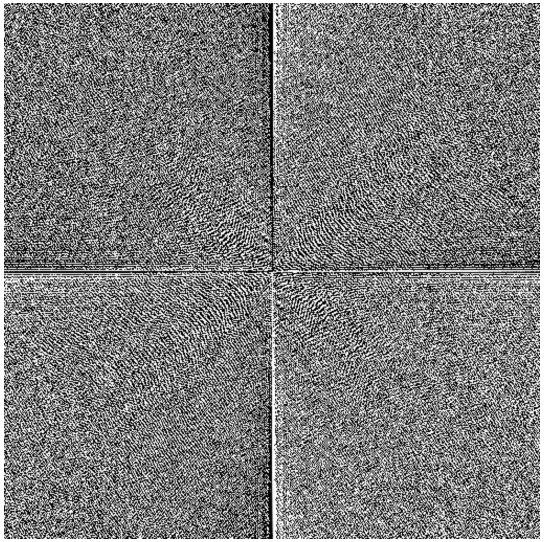
Amplitude (zentriert, log. Skala)

Beispiele

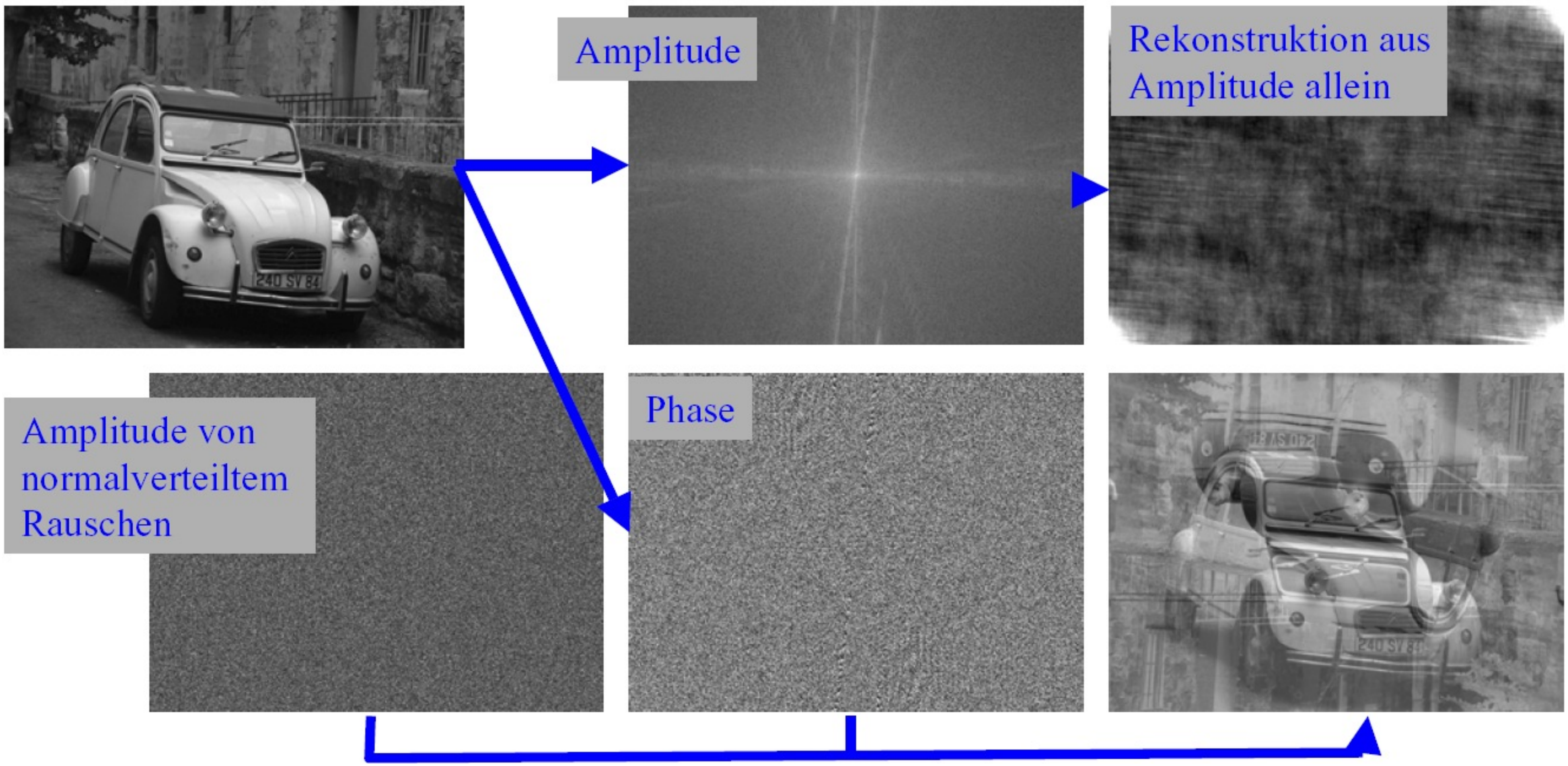
Amplitude



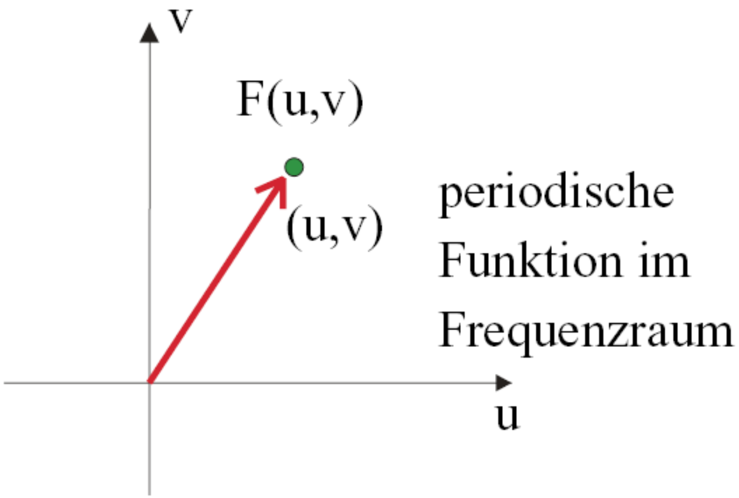
Phase

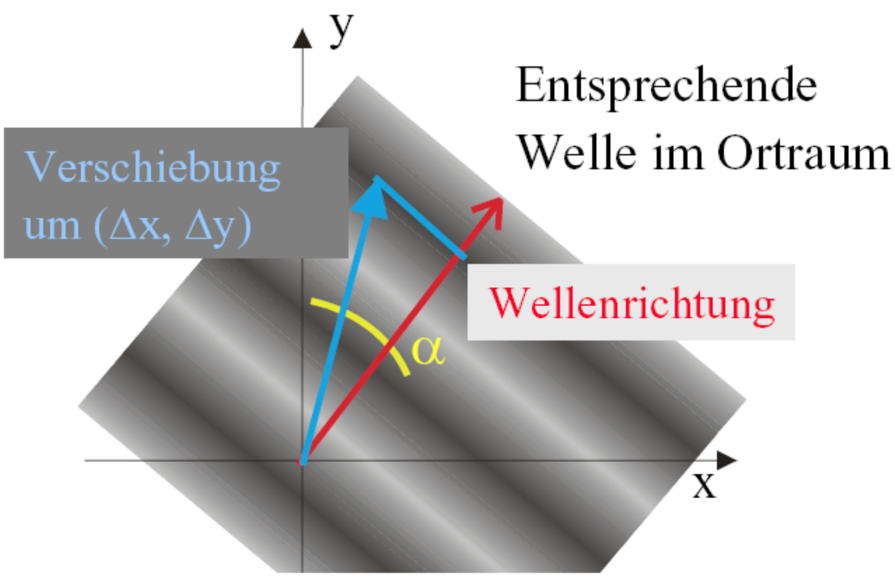


Einfluss von Amplitude und Phase



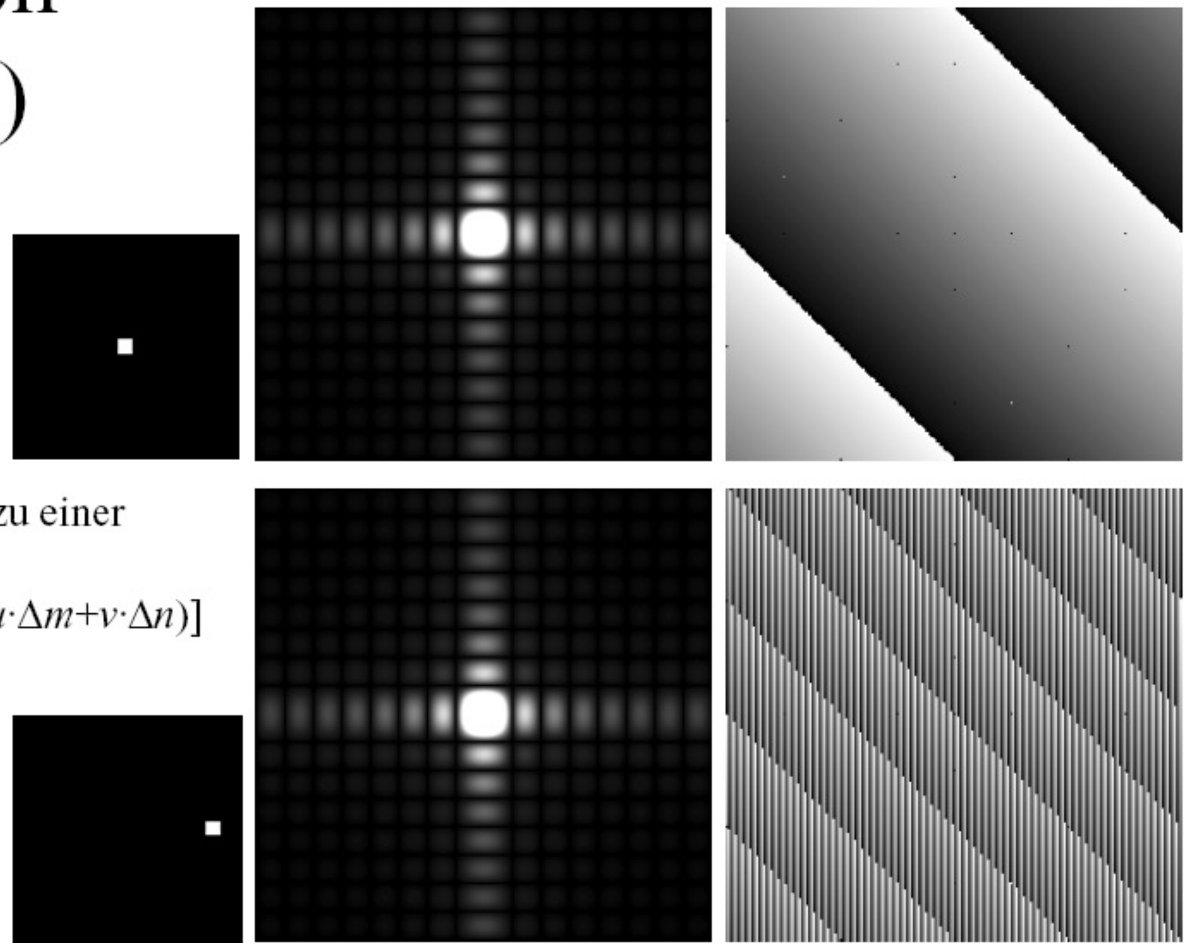
Translation





- Translation im Ortsbereich führt zu einer Translation der zusammensetzenden Wellen.
- Umfang der Translation hängt vom Unterschied zwischen Wellenrichtung $(u\ v)$ und Translationsrichtung $(\Delta x\ \Delta y)$ ab.
- Im Frequenzbereich bedeutet die Translation eine Phasenverschiebung.

Translation (Beispiel)



Translation um (Δm, Δn) führt zu einer Phasenverschiebung
$F'(u,v) = F(u,v) \cdot \exp[-i \cdot 2\pi/N \cdot (u \cdot \Delta m + v \cdot \Delta n)]$

Phasenverschiebung

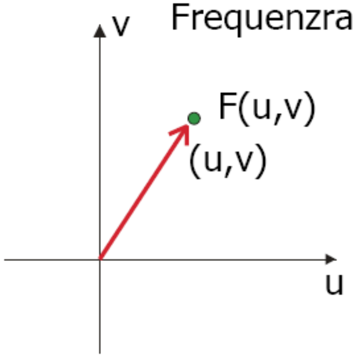
$p_{u,v} = |(\Delta x, \Delta y)| \cdot \cos(\alpha) \,/\, T_{u,v}$ mit

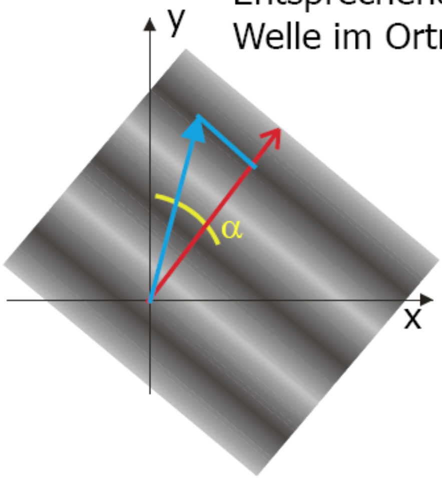
- $\cos(\alpha)$ - Winkel zwischen Wellenrichtung und Richtung von $(\Delta x, \Delta y)$
- $T_{u,v}$ - Wellelänge = 1/Frequenz

$$\cos(\alpha) = \frac{<(\Delta x, \Delta y),(u,v)>}{|(\Delta x, \Delta y)| \cdot |(u,v)|}$$

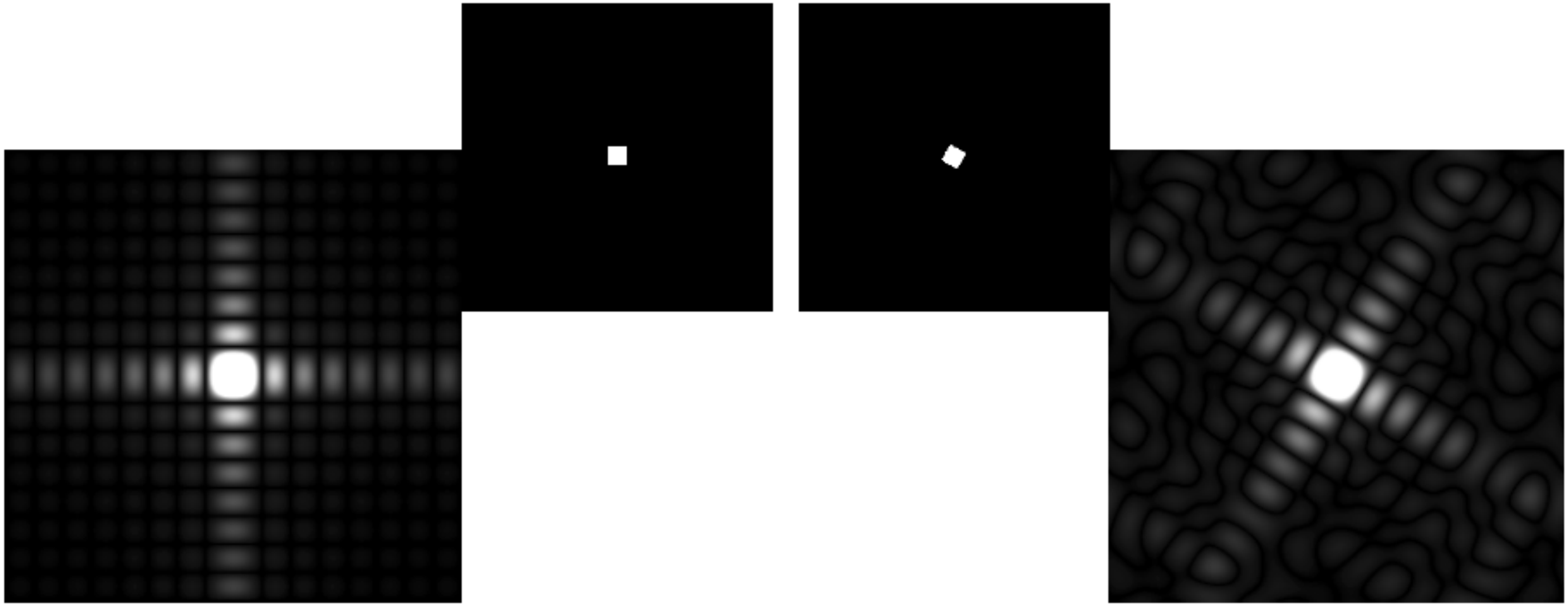
$$T_{u,v} = N/2\pi \cdot |(u,v)|$$

$$\Rightarrow p_{u,v} = \exp(i \cdot 2\pi/\mathrm{N} \cdot (u\Delta x + v\Delta y))$$





Rotation: $F(u,v)$ wird in gleicher Weise rotiert wie $f(m,n)$.



Periodizität und Symmetrie

- Für ein- und zweidimensionale Funktionen mit M bzw. M und N Werten gilt:
  - $F(u) = F(u+M), f(m)=f(m+M)$
  - $F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$
  - $f(m,n) = f(m+M,n) = f(m,n+N) = f(m+M,n+N)$
- Für reellwertige Funktionen f gilt für die Fouriertransformierte:
  - $F(u) = {}^*F(-u)$
  - $F(u,v) = {}^*F(-u,-v)$

  (reduziert die zu berechnenden Werte um die Hälfte)

  *x=a-ib ist die komplex-konjugierte der komplexen Zahl x=$a+ib$.

$$F(u) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot \exp\left(-i2\pi \frac{un}{N}\right)$$

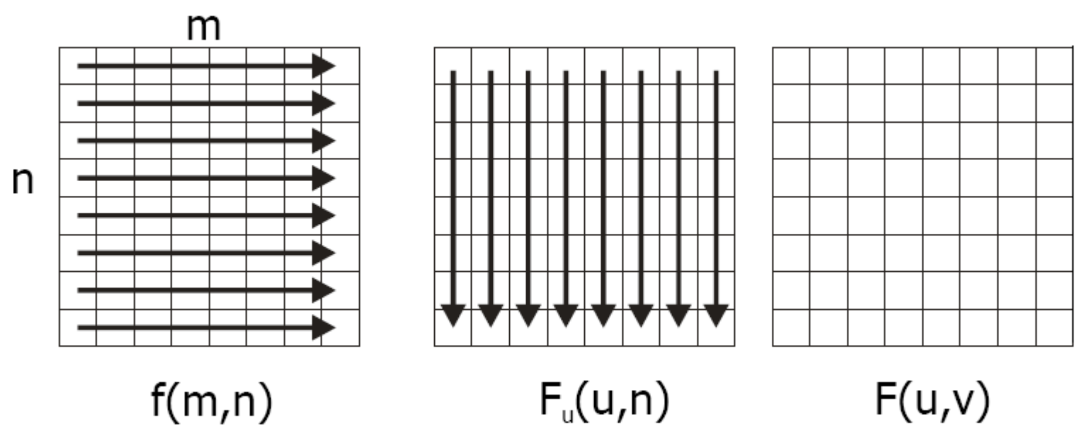
Separabilität

Die Fouriertransformation ist separabel, d.h., sie kann zunächst in M-Richtung und anschließend auf diesen Zwischenergebnissen in N-Richtung ausgeführt werden.

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, \Sigma_\mu \, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot (um+vn)/\mathrm{N}) \\
&= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, \Sigma_\mu \, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot um/N) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N) \\
&= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \left[\Sigma_\mu \, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot um/N) \right] \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N) \\
&= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, F_u(m,n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N)
\end{aligned}
$$

kann aus der inneren Summe ausgeklammert werden.

Reduziert den Berechnungsaufwand von $O(N^4)$ auf $O(N^3)$.



Konvolution und Korrelation

- Konvolution und Korrelation sind zwei eng verwandte Filter-Operationen.
- Beide können im Ortsraum und im Frequenzraum ausgeführt werden.
- Die Operation im Frequenzraum ist eine einfache Multiplikation (Aufwand N^2).
- Achtung: Padding wegen Periodizität!

  $P = A + B - 1$

Konvolution im Frequenzraum

$$\boxed{F(u)\cdot H(u)} = \Sigma_k f(k)\cdot\exp(-i2\pi uk/N)\cdot\Sigma_m h(m)\cdot\exp(-i2\pi um/N)$$

$$=\Sigma_m\Sigma_k\left[f(k)\cdot\exp(-i2\pi uk/N)\cdot \mathrm{h}(m)\cdot\exp(-i2\pi um/N)\right]$$

$$=\Sigma_m\Sigma_k\left[f(k)\cdot h(m)\cdot\exp(-i2\pi uk/N)\cdot\exp(-i2\pi um/N)\right]$$

(Verschiebeeigenschaft $h(m)\cdot\exp(-i2\pi uk/N) = \mathrm{h}(m-k)$)

$$=\Sigma_m\Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)\cdot\exp(-i2\pi um/N)$$

$$=\Sigma_m\left[\Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)\right]\cdot\exp(-\mathrm{i}2\pi um/N)$$

$$=\mathbf{FT}\left[\Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)\right] = \boxed{\mathbf{FT}\left[[f*h](m)\right]}$$

Konvolution im Frequenzraum

- 1D-Konvolution

$$f(x) * h(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot h(x-n)$$

$$\Leftrightarrow F(u) \cdot H(u)$$

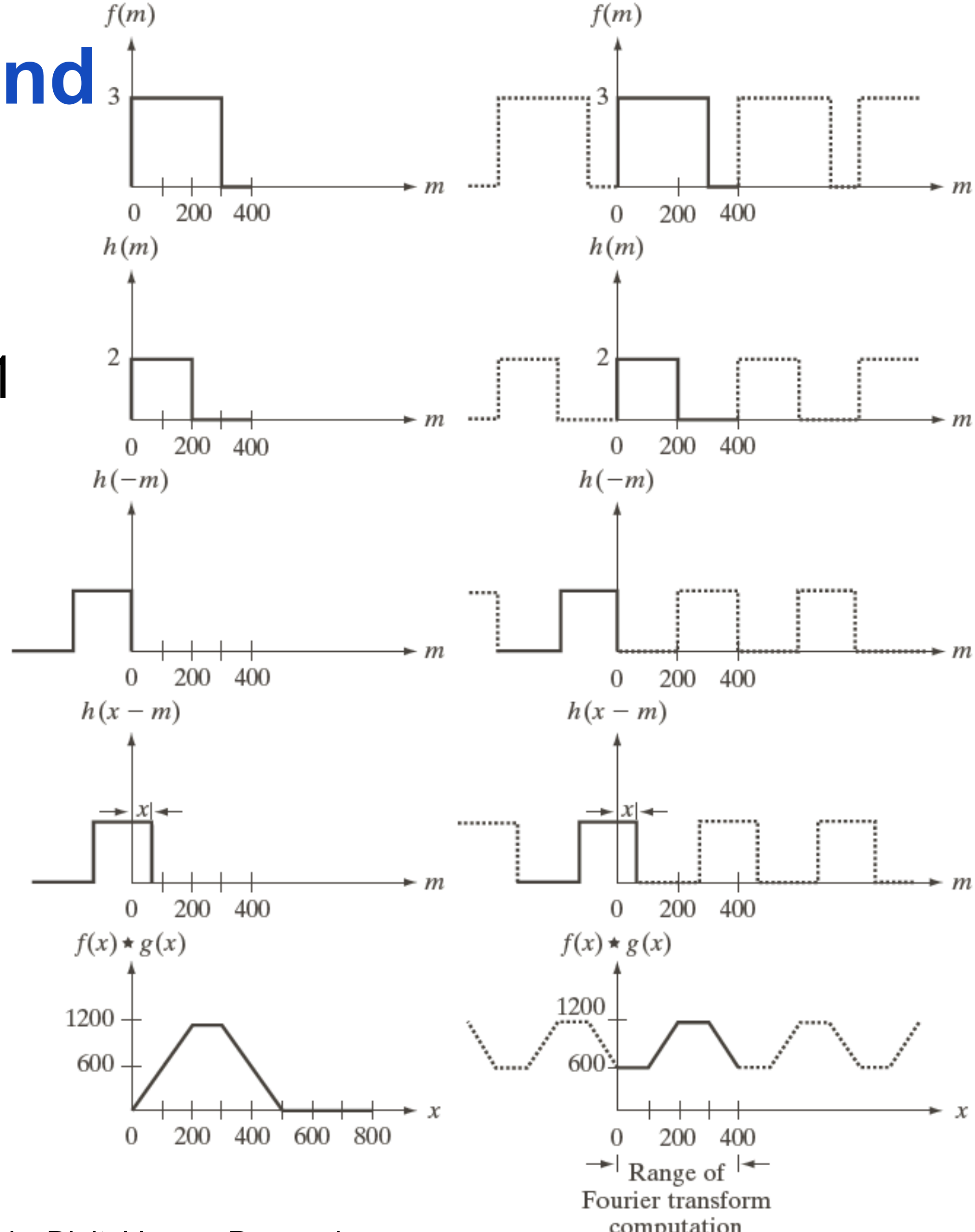
- 2D-Konvolution

$$f(x,y) * h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \cdot h(x-m, y-n)$$

$$\Leftrightarrow F(u,v) \cdot H(u,v)$$

Wraparound Error

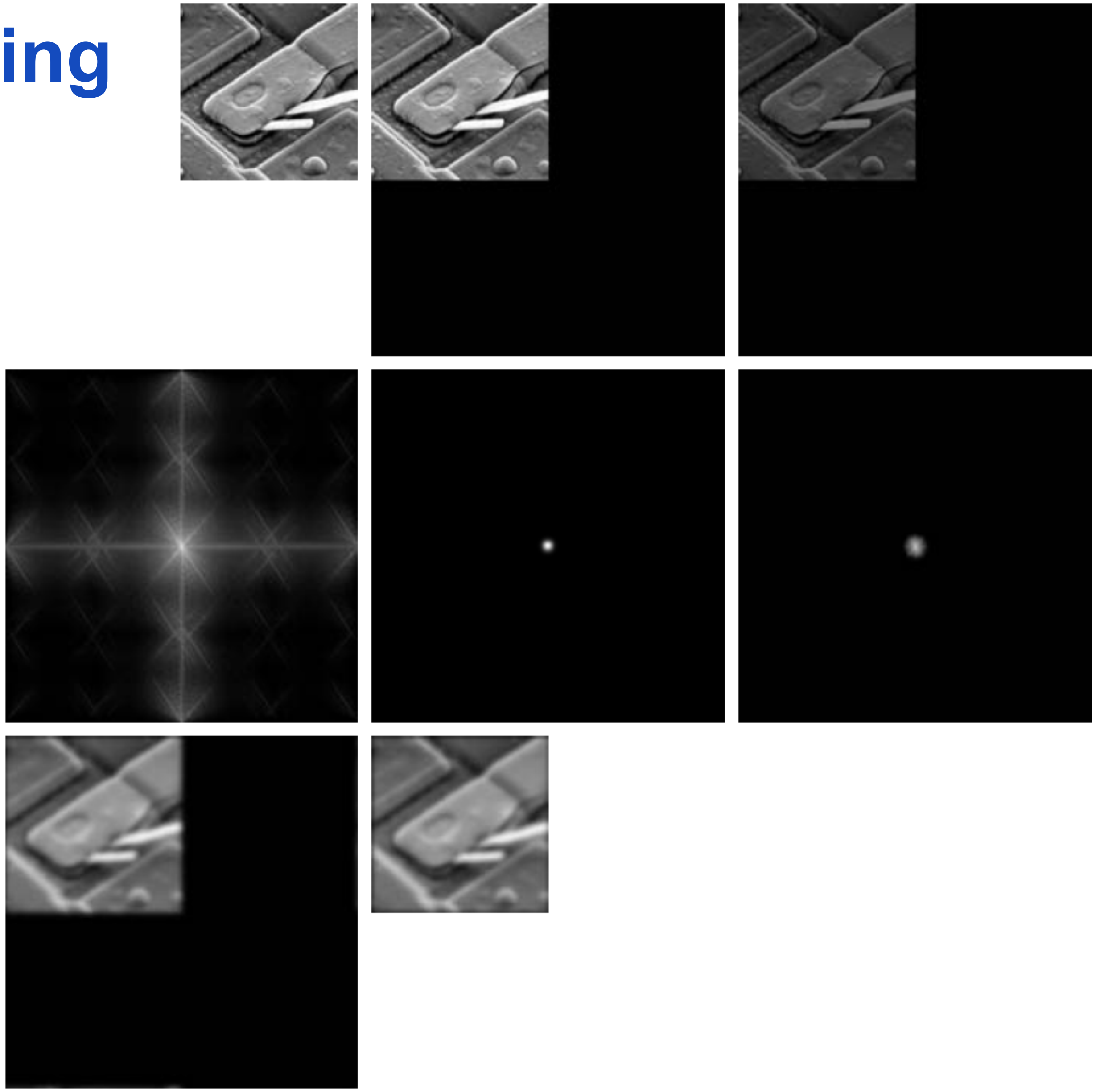
- Padding:
  $P \geq A + B - 1$



a f
b g
c h
d i
e j

FIGURE 4.28 Left column: convolution of two discrete functions obtained using the approach discussed in Section 3.4.2. The result in (e) is correct. Right column: Convolution of the same functions, but taking into account the periodicity implied by the DFT. Note in (j) how data from adjacent periods produce wraparound error, yielding an incorrect convolution result. To obtain the correct result, function padding must be used.

Padding



a b c
d e f
g h

FIGURE 4.36 (a) An $M \times N$ image, f. (b) Padded image, f_p of size $P \times Q$. (c) Result of multiplying f_p by $(-1)^{x+y}$. (d) Spectrum of F_p. (e) Centered Gaussian lowpass filter, H, of size $P \times Q$. (f) Spectrum of the product HF_p. (g) g_p, the product of $(-1)^{x+y}$ and the real part of the IDFT of HF_p. (h) Final result, g, obtained by cropping the first M rows and N columns of g_p.

FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)

Vorgehensweise generell

- Vereinfachende Annahme: $N=2^k$, $k>1$
- Nutze Separabilität, um 2D-FT auf 1D zurückzuführen ($O(N^4) \rightarrow O(N^3)$)
- Teile Summe in zwei Teilsummen auf
- Finde Gemeinsamkeiten in den Teilsummen und berechne beide Teilsummen miteinander
- Betrachte die Teilsumme und unterteile rekursiv bis N=1 ($O(N^3) \rightarrow O(N^2 \log N)$)

Separabilität

$$F(u,v) = \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}(um+vn)\right] =$$

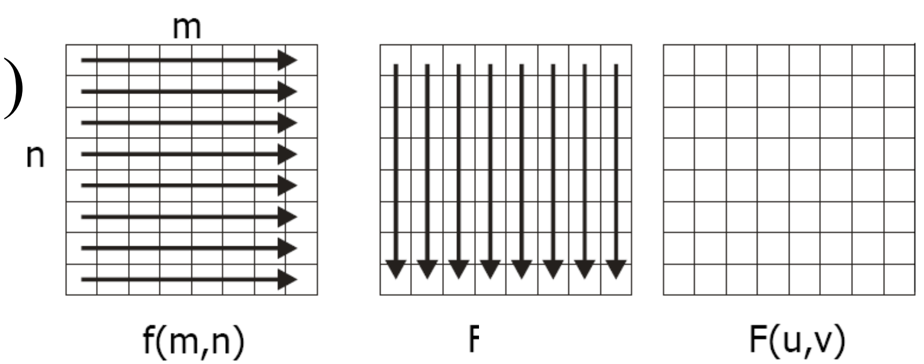
$$= \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}um\right]\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}vn\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}vn\right]\right)\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}um\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}um\right]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}vn\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\exp\left[-i\frac{2\pi}{N}um\right]F_u(m)$$

- Vorgehensweise: $F_u(m)$ für alle Spalten m berechnen und dann bei den Zeilen verwenden.



Divide Schritt

- Teile Summe in zwei Teilsummen auf

$$N = 2K, W_N = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)(W_N)^{un} = \frac{1}{2K}\sum_{n=0}^{2K-1} f(n)(W_{2K})^{un} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_{2K})^{2nu} + \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_{2K})^{(2n+1)u}\right)$$

- Finde Gemeinsamkeiten in den Teilsummen

$$F_{even}(u) = \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_{2K})^{2nu}, F_{odd}(u) = \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_{2K})^{2nu}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\left(F_{even}(u) + F_{odd}(u)(W_{2K})^{u}\right)$$

Ausnutzen der Periodizität

$$N = 2K, W_N = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$\left(W_K\right)^{u+N} = \left(W_K\right)^u, \left(W_{2K}\right)^{u+K} = -\left(W_{2K}\right)^u$$

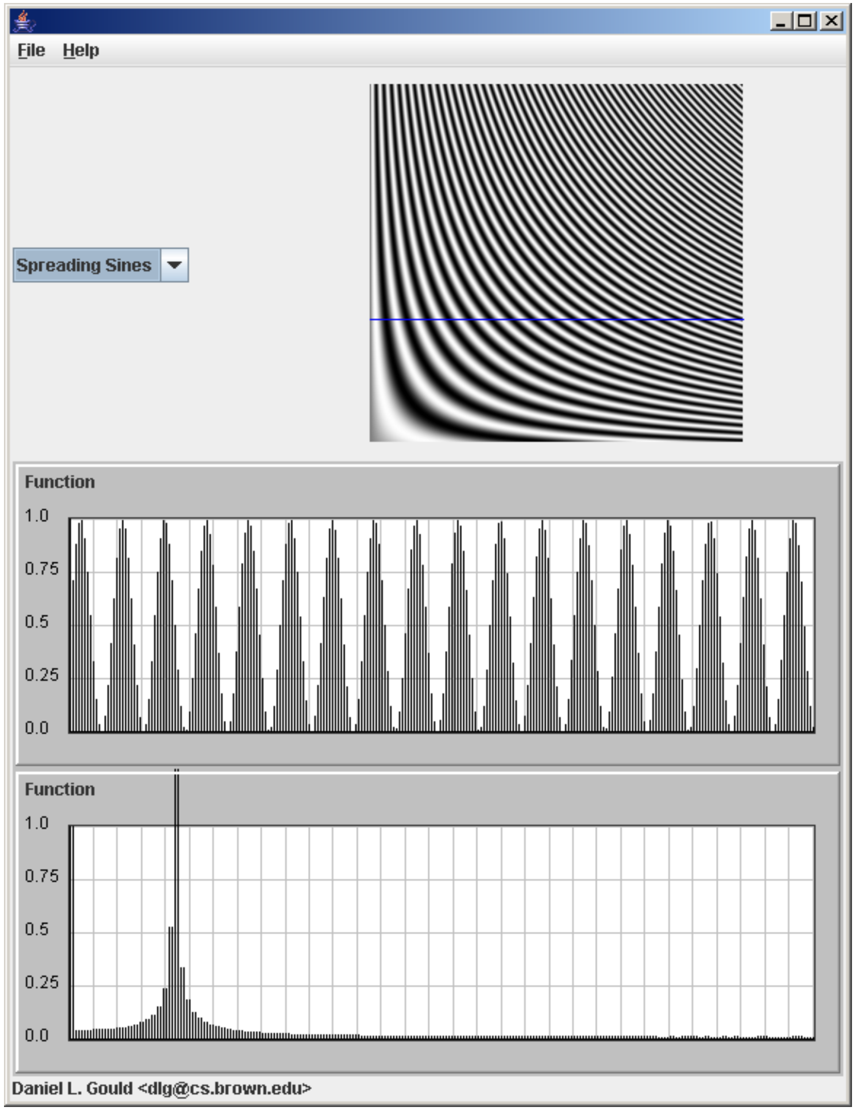
$$F\left(u+K\right) = \frac{1}{2}\left(F_{even}\left(u+K\right) + F_{odd}\left(u+K\right)\left(W_{2K}\right)^{u+K}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(F_{even}\left(u\right) - F_{odd}\left(u\right)\left(W_{2K}\right)^u\right)$$

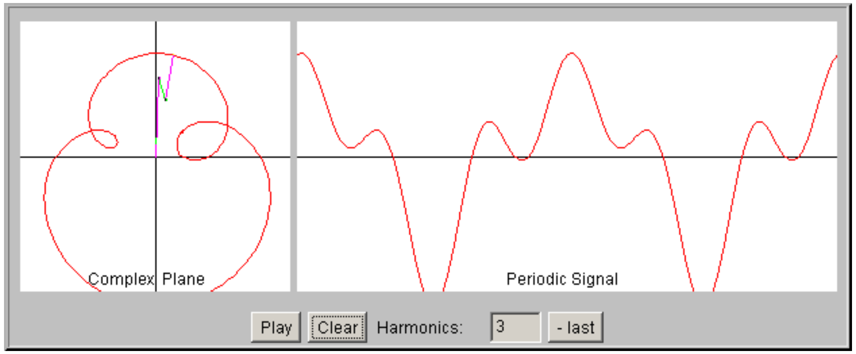
- Also kann man F(u+K) mithilfe F(u) berechnen (einmal $F_{even} + F_{odd}$, einmal $F_{even} – F_{odd}$)
- Betrachte die Teilsumme [0…K-1] und unterteile rekursiv bis K=1 ($O(n^3) \rightarrow O(n^2 \log n)$)

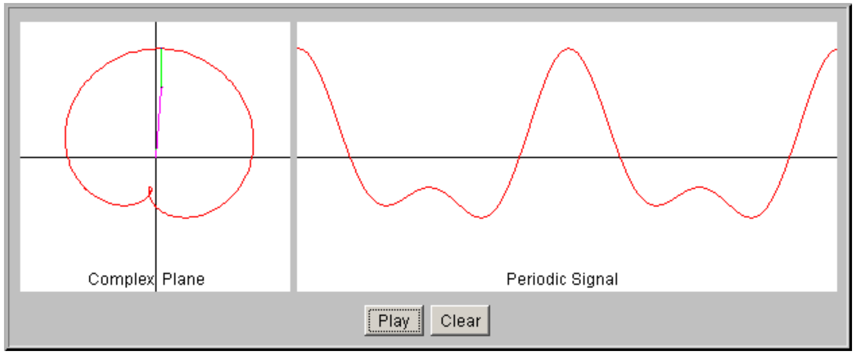
Fourier Transformation zum Anschauen

- http://www.cs.brown.edu/exploratories/



Überlagerung von Schwingungen: anschaulich





http://www.jhu.edu/~signals/index.html