Ludwig-Maximilians-Universität München
LFE Medieninformatik
Prof. Dr. Andreas Butz
Dominikus Baur, Sebastian Boring

Sommersemester 2009
Übungsblatt 11
17.Juli 2009

Computergrafik 1

Abgabetermin:
Die Lösungen zu diesem Übungsblatt müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Inhalt:
Dieses Blatt enthält beispielhafte Klausuraufgaben. Diese Aufgaben sind im Anspruch und Umfang mit den tatsächlich gestellten vergleichbar und sollen einen Anhaltspunkt zur Vorbereitung bieten. Bitte beachten Sie, dass der Umfang des gesamten Übungsblatts nicht dem Umfang der Klausur entsprechen muss.

Erlaubte Hilfsmittel in der Klausur sind wissenschaftliche Taschenrechner und Schreibgeräte. Mobiltelefone, Computer, eigene Notizen, Skripten, Bücher etc. sind nicht zugelassen.
In der Klausur selbst müssen insgesamt etwa 50% der möglichen Punkte (bei keinen angerechneten Bonuspunken) erreicht werden um zu bestehen.

Aufgabe 1 Transformationen und Projektionen (12 Punkte)

Durch affine Transformationen können Vertices und Objekte in einem virtuellen Raum manipuliert werden. Die folgende Aufgabe bezieht sich auf ein dreidimensionales Koordinatensystem (kartesisch, rechtshändig, rechtsdrehend).

a) Um Transformationen schnell ausführen zu können werden sie in der Computergrafik durch Matrizenmultiplikationen dargestellt. Allerdings müssen Matrizen um alle affinen Transformationen einheitlich mit ihnen darstellen zu können erweitert werden. Wie heißen diese speziellen Matrizen und wie unterscheiden sie sich von regulären, dreidimensionalen Matrizen? **(2 Punkte)**

- *Homogene (Transformations-)Matrizen (1 Punkt)*
- *Homogene Matrizen haben eine Dimension mehr als reguläre (also in diesem Fall vier Dimensionen statt drei). Eine homogene 3D-Transformationsmatrix hat folgendes Format:*

$$\begin{pmatrix} a11 & a21 & a31 & a41 \\ a12 & a22 & a32 & a42 \\ a13 & a23 & a33 & a43 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

Die homogene Komponente w kann dabei beliebige Werte annehmen, ist aber normalisiert 1

b) Die drei am Häufigsten verwendeten affinen Transformationen sind Translation, Rotation und Skalierung. Geben Sie die dazugehörigen Transformationsmatrizen für den dreidimensionalen Raum an. **(3 Punkte)**

- *Translation:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t1 \\ 0 & 1 & 0 & t2 \\ 0 & 0 & 1 & t3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Skalierung:*

$$\begin{pmatrix} s1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Rotation unterteilt sich in die Rotation um die drei Koordinatenachsen.*
  Rotation um X-Achse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Rotation um Y-Achse:*

$$\begin{pmatrix} cos\alpha & 0 & sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\alpha & 0 & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Rotation um Z-Achse:*

$$\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Gegeben sei ein Dreieck mit folgenden Eckpunkten:

- *P1 (1, -5, 0)*
- *P2 (7, 10, -2)*
- *P3 (-3, 7, 2)*

Das Dreieck soll zuerst um 37,5° um die Y-Achse gedreht werden und danach um den Vektor *v (3, 10, -1)* verschoben werden. Führen Sie diese Transformationen nur durch Matrixmultiplikation durch: Erstellen Sie zuerst eine Transformationsmatrix und wenden Sie diese dann auf die einzelnen Punkte des Dreiecks an. Geben Sie Rechenweg sowie das Ergebnis an. **(4 Punkte)**

- *37,5° Rotation um Y-Achse:*

$$\begin{pmatrix} cos37,5^\circ & 0 & sin37,5^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin37,5^\circ & 0 & cos37,5^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,793 & 0 & 0,609 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,609 & 0 & 0,793 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Translation um (3, 10, -1):*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Resultierende Transformationsmatrix T:*

$$\begin{pmatrix} 0,793 & 0 & 0,609 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ -0,609 & 0 & 0,793 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Anwendung auf Punkte:*

$$T * p1 = \begin{pmatrix} 0,793 & 0 & 0,609 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ -0,609 & 0 & 0,793 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,793 \\ 5 \\ -1,609 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T * p2 = \begin{pmatrix} 0,793 & 0 & 0,609 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ -0,609 & 0 & 0,793 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,333 \\ 20 \\ -6,849 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T * p3 = \begin{pmatrix} 0,793 & 0 & 0,609 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ -0,609 & 0 & 0,793 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,839 \\ 17 \\ 2,413 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Die Transformationen aus der vorherigen Aufgabe sollen wieder rückgängig gemacht werden. Erstellen Sie die entsprechende Transformationsmatrix. **(1 Punkt)**

- *Zwei Möglichkeiten: Entweder die erstellte Transformationsmatrix invertieren (z.B. mit Gauss-Jordan) oder die jeweils inversen Transformationen in umgekehrter Reihenfolge multiplizieren:*

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} cos-37,5^\circ & 0 & sin-37,5^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin-37,5^\circ & 0 & cos-37,5^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,793 & 0 & -0,609 & -2.999 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0,609 & 0 & 0,793 & -1.034 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Um dreidimensionale Szenen auf den zweidimensionalen Bildschirm zu bringen werden Projektionen benutzt. Nennen Sie zwei Projektionsarten die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben und beschreiben Sie kurz deren Eigenschaften und Unterschiede. **(2 Punkte)**

- *Parallelprojektion / Orthographische Projektion: Punkte werden mithilfe einer Projektionsgeraden auf die Projektionsebene gebracht (einfachster Ansatz: z-Anteile der Koordinaten auf 0 setzen). Dadurch ergibt sich keine perspektivische Verzerrung, d.h. Objekte werden nicht kleiner wenn sie weiter vom Ursprung entfernt sind.*
- *Perspektivische Projektion: Punkte werden mittels eines Sichtkörpers auf die Bildebene projiziert. Da man für diesen Sichtkörper normalerweise einen Pyramidenstumpf nimmt, bildet sich ein Fluchtpunkt in der Mitte des Bilds. Der Abstand der Objekte vom Ursprung bestimmt der Größe.*

Aufgabe 2 Farben und Licht **(6 Punkte)**

Licht und Farben sind elementare Bestandteile der Computergrafik. Um realistische Ergebnisse zu erhalten werden verschiedene Farb- und Lichtmodelle verwendet.

a) RGB / CMY und HSL / HSV gehören zu zwei unterschiedlichen Gruppen von Farbmodellen. Wie heißen diese Gruppen? **(1 Punkt)**

- *RGB + CMY(K): Hardwareorientierte Farbmodelle*
- *HSL + HSV: Perzeptionsorientierte Modelle*

b) Im Zusammenhang mit Farben spielt auch Kontrast eine große Rolle. Welche der in Aufgabenteil a) genannten Farbmodelle eignen sich gut zur einfachen Beschreibung des Hell-Dunkel-Kontrasts und warum? **(1 Punkt)**

- *HSL und HSV eignen sich besser zur einfachen Beschreibung von Hell und Dunkel weil die Helligkeit in beiden durch Lightness bzw. Value bereits direkt enthalten ist. Bei RGB und CMY müsste diese erst ausgerechnet werden.*

c) Erklären Sie den grundlegenden Unterschied zwischen RGB und CMY. Geben Sie außerdem die Formel zur Konvertierung von RGB nach CMY an. **(1 Punkt)**

- *RGB ist ein additives (d.h. zu Schwarz werden Farbanteile hinzugefügt), CMY ein subtraktives Farbmodell (d.h. von Weiß werden Farbanteile abgezogen). Einfaches Konvertierungsverfahren für Werte zwischen 0 und 1 (s. Vorlesung „Farben“ S.31):*

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

d) In der Vorlesung wurde das Beleuchtungsmodell nach Phong besprochen. Erklären Sie den Unterschied zwischen den ambienten, diffusen und spekularen Anteilen des Lichts in diesem Modell! **(3 Punkte)**

- *Ambientes Licht: Grundbeleuchtung. Umgebungslicht das aus allen möglichen Quellen stammt und von allen möglichen Objekten reflektiert wird. Annäherung, weil tatsächliche Berechnung zu aufwändig wäre. Ist gleichmäßig in der Szene verteilt, unabhängig von der Betrachterposition.*
- *Diffuses Licht: Licht das sich gleichmäßig (matt) in alle Richtungen streut. Wieder unabhängig vom Betrachter, allerdings nicht von der Position der Lichtquellen.*
- *Spekulares Licht: Gerichtetes, reflektiertes Licht an spiegelnden Oberflächen. Erzeugt Glanzpunkte. Abhängig von Lichtposition und Betrachterposition.*

Aufgabe 3 Konvolutionen (10 Punkte)

Ein Mittel zur Bearbeitung von Bildern ist die mathematische Konvolutionsfunktion. Dabei werden basierend auf einem Kernel Bildpunkte miteinander kombiniert.

a) Leiten Sie sich einen 3x3-Kernel her, mit dem sich eine Tiefpassfilterung im Frequenzraum durchführen lässt. Erklären Sie kurz, warum dieser Kernel das Bild weichzeichnet. **(2 Punkte)**

- *Konvolutionen dienen dazu, den Helligkeitswert bzw. die Farbwerte eines Pixels als gewichtete Summe seiner Nachbarpixel darzustellen. Um das Bild weichzuzeichnen sollten die Unterschiede zwischen benachbarten Pixeln verringert werden, d.h. alle* *benachbarten Pixel sollten denselben Einfluss auf das Ergebnis haben. Die naive Lösung*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

führt aber leider dazu, dass sich die Helligkeit des Bilds deutlich erhöht. Nach der Normalisierung der Faktoren ergibt sich folgender Kernel:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

b) Wie ist die Konvolution mathematisch definiert? **(2 Punkte)**

- *Die Faltung eines Pixels an der Position (m, n) im Bild f mit dem Kernel g der Größe (I, J) lässt sich folgendermaßen durchführen:*

$$(g * f)(m,n) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} g(i,j) f(m + (I/2 - i), n + (J/2 - j))$$

c) Gegeben seien folgendes Bild (8-Bit Graustufen)

128	2	210	10
166	5	170	7
187	1	205	13

und ein Kernel:

-1	-1	-1
-1	9	-1
-1	-1	-1

Berechnen Sie die Auswirkung dieses Kernels auf die beiden in der Mitte des Bilds liegenden Punkte (d.h. '5' und '170'). **(3 Punkte)**

- *Berechnung für '5':*

$$K_5 = -1*205 + -1*1 + -1*187 + -1*170 + 9*5 + -1*166 + -1*210 + -1*2 + -1*128 =$$

$$= -1024 => 0$$

- *Berechnung für '170':*

$$K_{170} = -1*13 + -1*205 + -1*1 + -1*7 + 9*170 + -1*5 + -1*10 + -1*210 + -1*2 =$$

$$= 1077 => 255$$

d) Welcher Filter wird durch diesen Kernel dargestellt und welchen Effekt hat er? **(1 Punkt)**

- *Hochpass: Scharfzeichnen und Kanten finden*

e) Für die Pixel am Bildrand kann die Konvolution nicht direkt angewendet werden, weil nicht ausreichend Bildpunkte vorhanden sind. Nennen und beschreiben Sie zwei Lösungsansätze für dieses Problem! **(1 Punkt)**

- *Erste Lösung: Bild periodisch fortsetzen (entweder einfach wiederholen oder an den Rändern spiegeln)*
- *Zweite Lösung: Kernel nicht auf Randwerte anwenden*

f) Wie unterscheidet sich die Konvolution von der Korrelation (*ohne Formeln*) und wofür kann sie verwendet werden? **(1 Punkt)**

- *Während bei der Konvolution der Kernel von rechts unten nach links oben durchgegangen wird und mit den Bildpunkten, die von links oben nach rechts unten ausgelesen werden, multipliziert wird, läuft die Korrelation parallel zum Bild: Das linke obere Element des Kernels wird mit dem linken oberen Bildpunkt multipliziert etc. Die Korrelation kann zum Finden von bestimmten Bildausschnitten benutzt werden.*

Aufgabe 4 Fouriertransformation (9 Punkte)

Die Fouriertransformation und ihre Inverse dienen dazu, Funktionen in den Frequenzraum zu transformieren. Dies wird in der Computergrafik genutzt um Bilder zu konvertieren.

a) Das Ergebnis einer Fouriertransformation ist eine komplexe Funktion. Um dieses Ergebnis anschaulicher zu machen wird diese in Amplitude und Phase aufgeteilt. Welche der beiden wird normalerweise bei Filtern und Kompression verändert und warum nicht beide? **(1 Punkt)**

- *Die Phase enthält räumliche Informationen über das Bild und sollte deshalb nicht manipuliert werden, um den Bildaufbau nicht zu zerstören. Daher arbeiten Filter und Kompressionsverfahren normalerweise auf dem Amplitudenanteil des Bilds.*

b) Welche algorithmische Komplexität hat die Fouriertransformation und warum? **(2 Punkte)**

- *Die Diskrete Fouriertransformation muss für jeden einzelnen Bildpunkt neu angewendet werden, was erstmal zu einer quadratischen Komplexität führt. Das Ergebnis für jeden Pixel ist (grob) eine gewichtete Summe aller anderen Bildpunkte, was wiederum zu quadratischer Komplexität führt. Gesamtkomplexität ist also n^4.*

c) Nennen Sie die beiden Eigenschaften der Fouriertransformation die bei der Fast Fouriertransformation ausgenutzt werden, um die Performanz zu erhöhen. Beschreiben Sie kurz, wie dies geschieht. **(4 Punkte)**

- *Die beiden verwendeten Eigenschaften sind Separabilität und Periodizität bzw. Symmetrie: Dank Separabilität können die Berechnung zuerst beispielsweise in horizontaler und dann in vertikaler Richtung ausgeführt werden. In einem Divide-And-Conquer basierten Verfahren wird die Symmetrie ausgenutzt: Nur die eine Hälfte der FT-Koeffizienten muss tatsächlich berechnet werden, die andere lässt sich daraus ableiten.*

d) Welche Komplexität hat die Fast Fouriertransformation und warum? **(2 Punkte)**

- *Die Separabilität reduziert den Rechenaufwand für das gesamte Bild von quadratisch auf linear. Die Koeffizientmenge lässt sich log(n) mal teilen und muss dann wieder zusammengefügt werden, was zu einer Komplexität von $n * log(n)$ führt. Die Komplexität ist also O($n^2 * log(n)$).*