

# Computergraphik 1

## 2. Teil: Bildverarbeitung

Fouriertransformation Ende  
FFT, Bildrestauration mit PSF  
Transformation, Interpolation

# Repräsentation als Exponentialfunktion

- Taylorreihenentwicklung für Kosinus und Sinus:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

- Taylorreihenentwicklung für  $e^{ix}$ :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots$$

- Es gilt daher wegen  $i^2 = -1$ :  $\cos(x) + i \cdot \sin(x) = e^{ix}$
- Phasenverschiebung  $\alpha$  kann in komplexen Funktionen als Multiplikation ausgedrückt werden:

$$\cos(x + \alpha) + i \sin(x + \alpha) = e^{i(x+\alpha)} = e^{ix} e^{i\alpha}$$

# 1D-Basisfunktionen

Bildfunktion:  $f(n)$ ,  $n=0, N-1$ ,

1	0	1	0
---	---	---	---

also:  $N$  Basisfunktionen

$$b_u(n) = \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot n \cdot u), \quad \text{mit Frequenzen } u=0, N-1$$

$$\text{z.B. } b_0(n) = [ (1,1), (1,1), \dots, (1,1) ]$$

Transformation **FT** :  $\mathbf{FT}(f) = \mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{B}$  (Vektor-Matrix-Schreibweise)

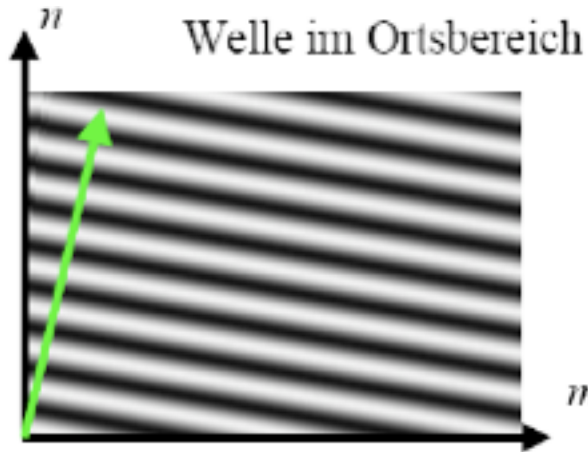
$$F(u) = \sum_m f(n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi / N \cdot n \cdot u), \quad \text{für alle } u=0, N-1$$

Rücktransformation **FT<sup>-1</sup>** :  $\mathbf{FT}^{-1}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}^T$  (Vektor-Matrix-Schreibweise)

$$f(n) = 1/N \cdot \sum_u F(u) \cdot \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot n \cdot u), \quad \text{für alle } n=0, N-1$$

← Skalierungsfaktor, weil die Basisfunktionen nicht normiert sind.

# 2D-Basisfunktionen



Basisfunktionen sind **Wellen** (Frequenz, Richtung, Amplitude, Phase):

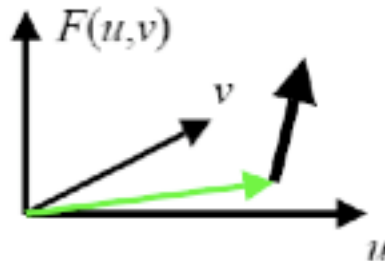
$$\exp(i \cdot 2\pi / N \cdot (mu + nv))$$

**Richtung** ist durch Vektor  $(u \ v)$  gegeben.

Die Basisfunktionen der 2-D Fouriertransformation sind **zerlegbar**:

$$\exp(i \cdot 2\pi / N \cdot (mu + nv)) = \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot m \cdot u) \cdot \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot n \cdot v)$$

(komplexer) Funktionswert  
im Frequenzbereich



# 2D-Fouriertransformationspaar

$$F(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$
$$f(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)}$$

Transformationspaar für Bilder  
der Größe  $M \times N$

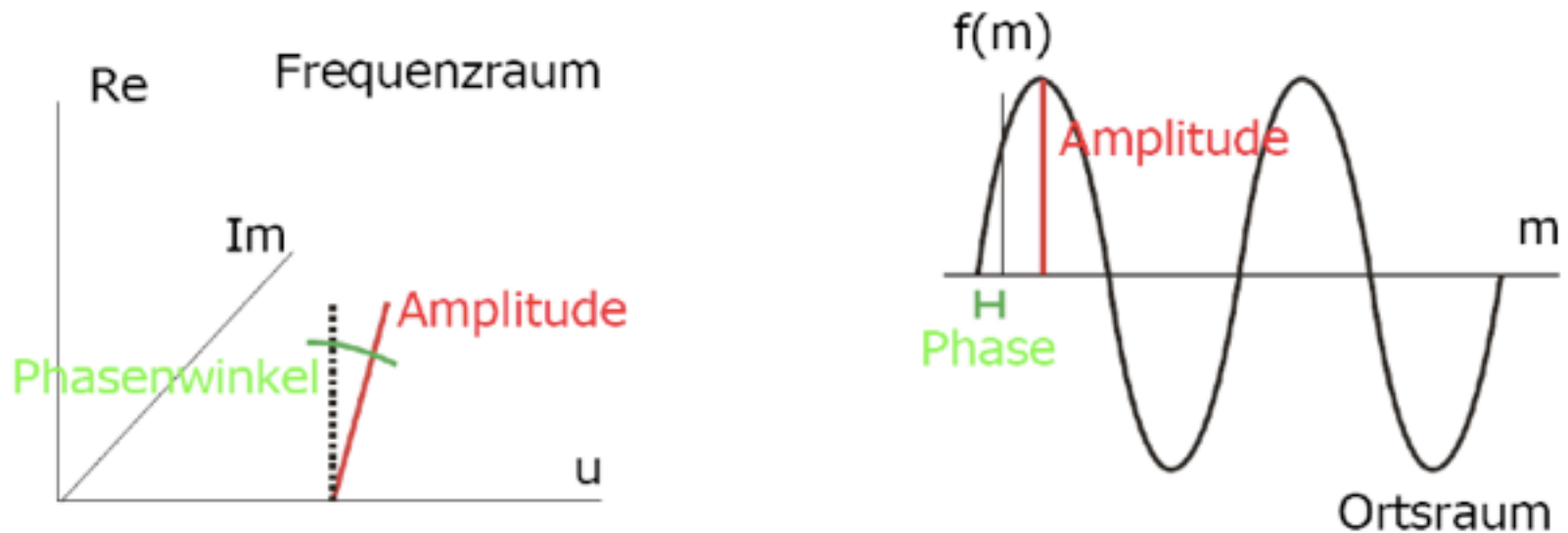
Transformationspaar für qua-  
dratische Bilder der Größe  $N \times N$

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot (um+vn)}$$
$$f(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot (um+vn)}$$

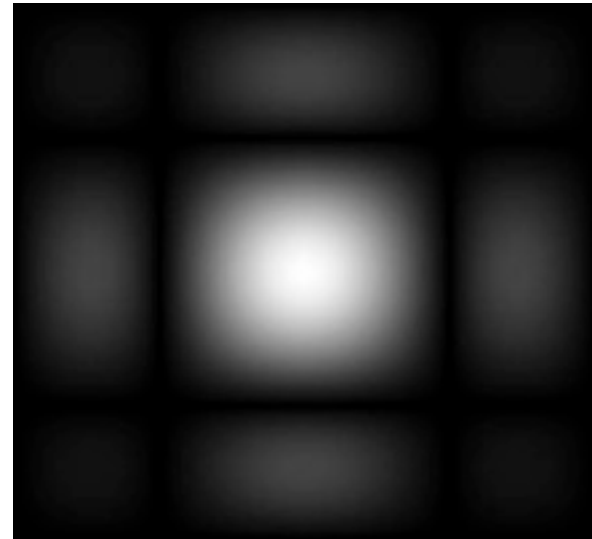
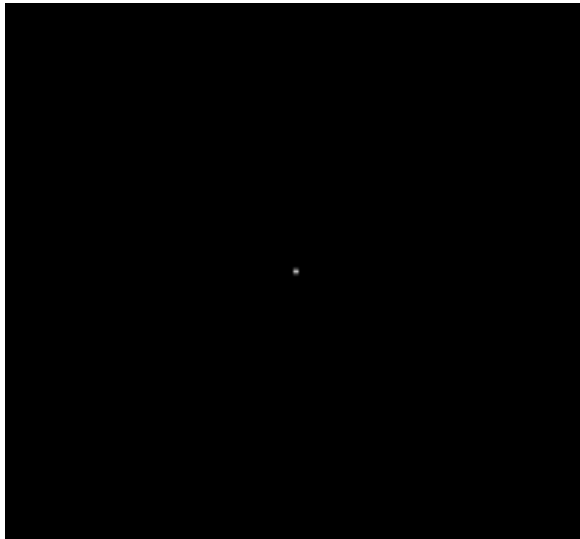
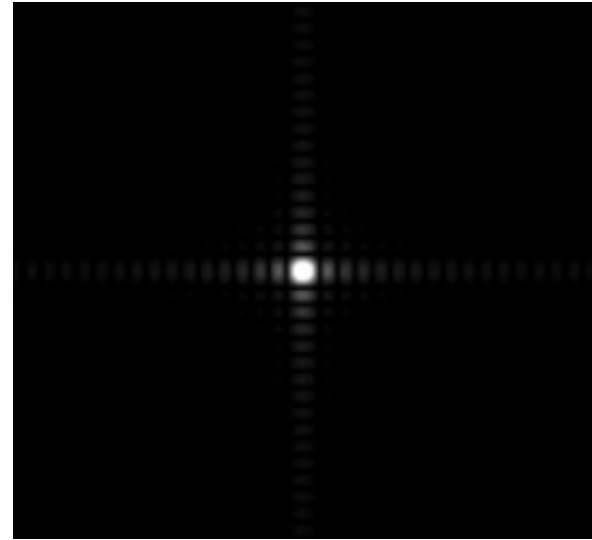
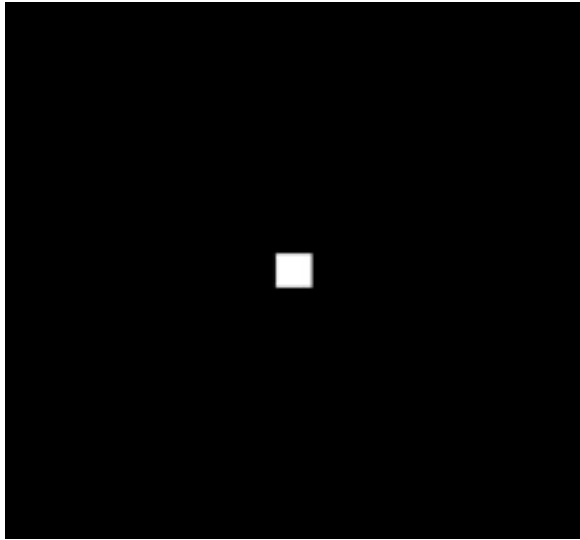
# Phase und Amplitude

Das Resultat der Fouriertransformation ist eine komplexe Funktion  $F(u)$ .

Der **Betrag** eines Funktionswerts ist die **Amplitude** und der **Winkel** zur reellen Achse ist die **Phase** zur Gewichtung der betreffenden Basisfunktion



# Beispiele f. Amplitude

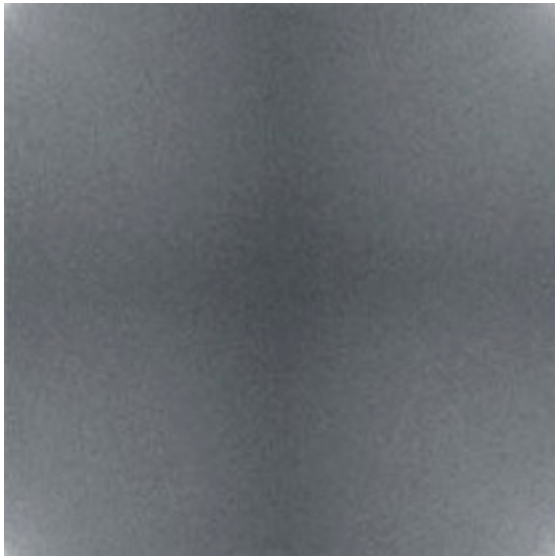


# Darstellungsweise

Original



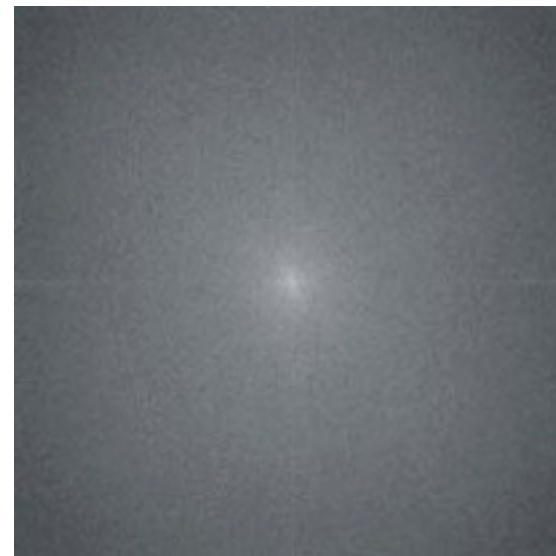
Amplitude  
(log. Skala)



Amplitude  
(zentriert,  
d.h. von  $-N/2$   
bis  $N/2$ )



Amplitude  
(zentriert,  
log. Skala)

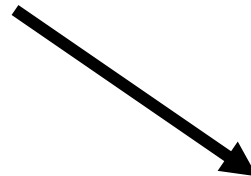
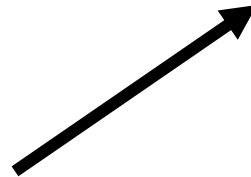
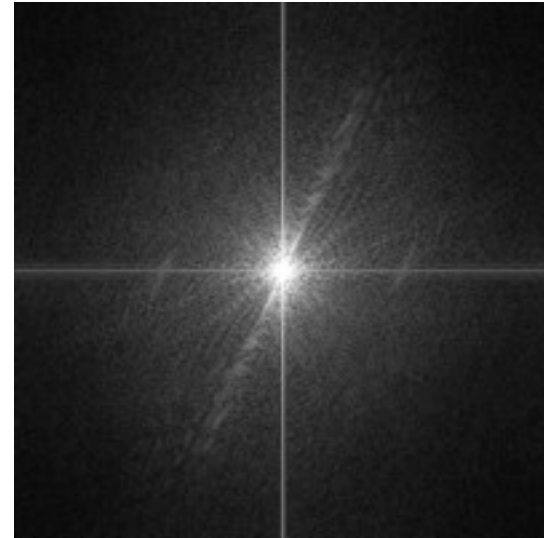




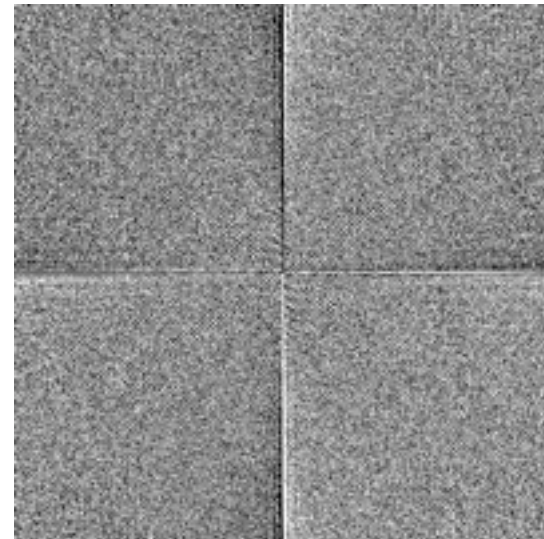
# Beispiele



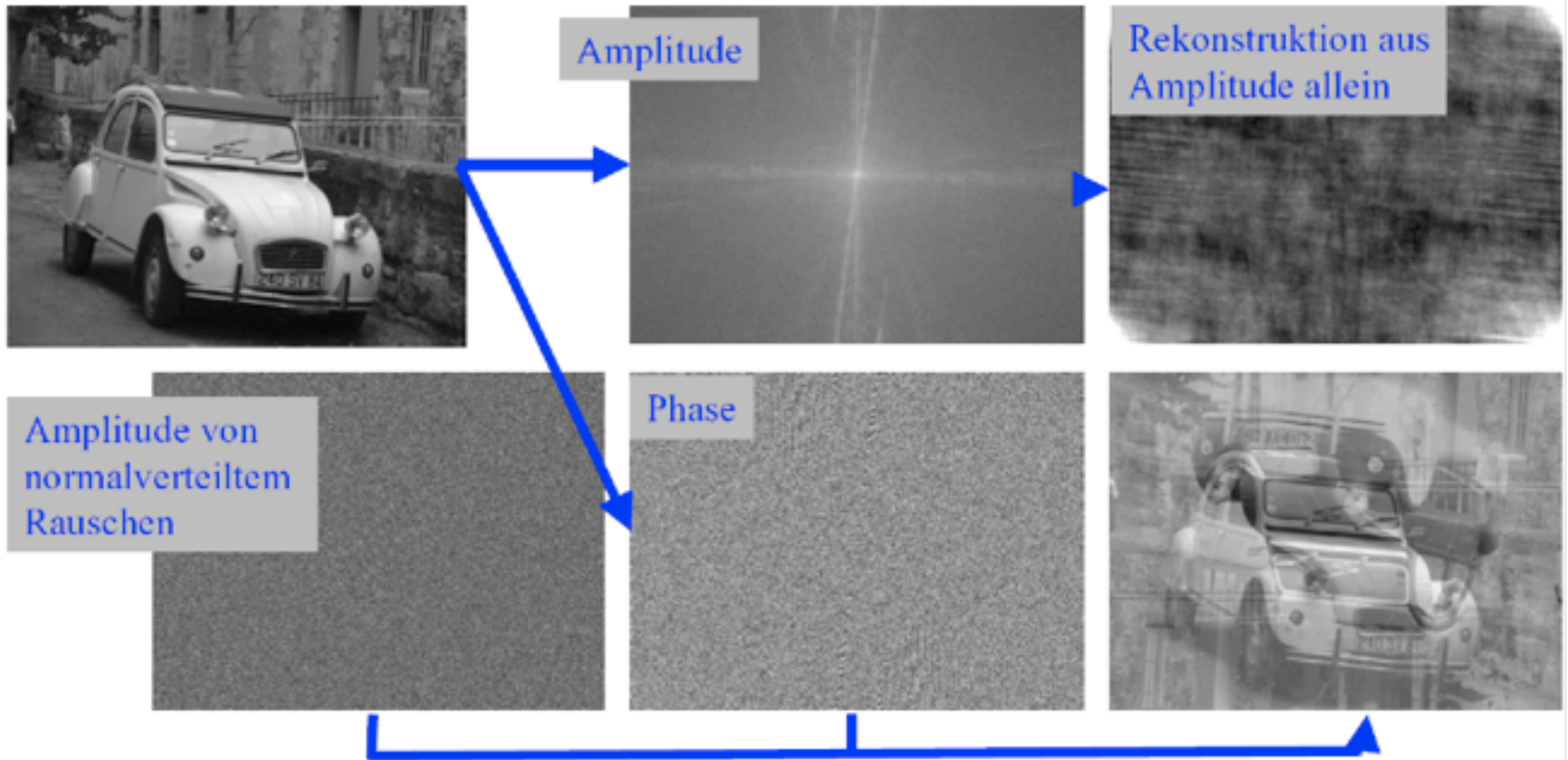
Amplitude



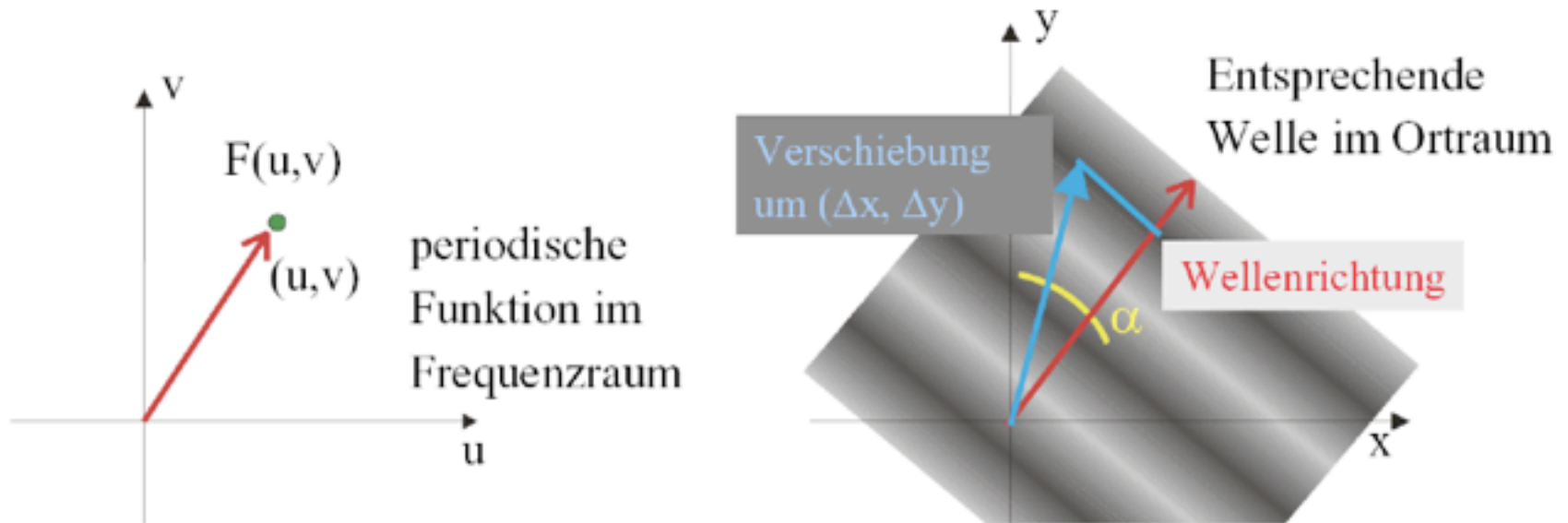
Phase



# Einfluss von Amplitude und Phase

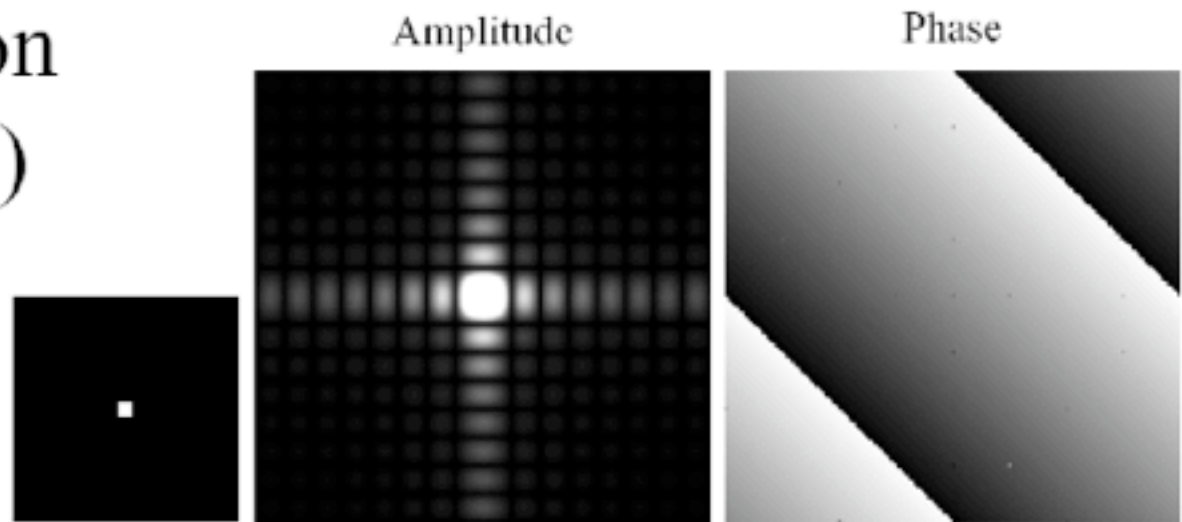


# Translation

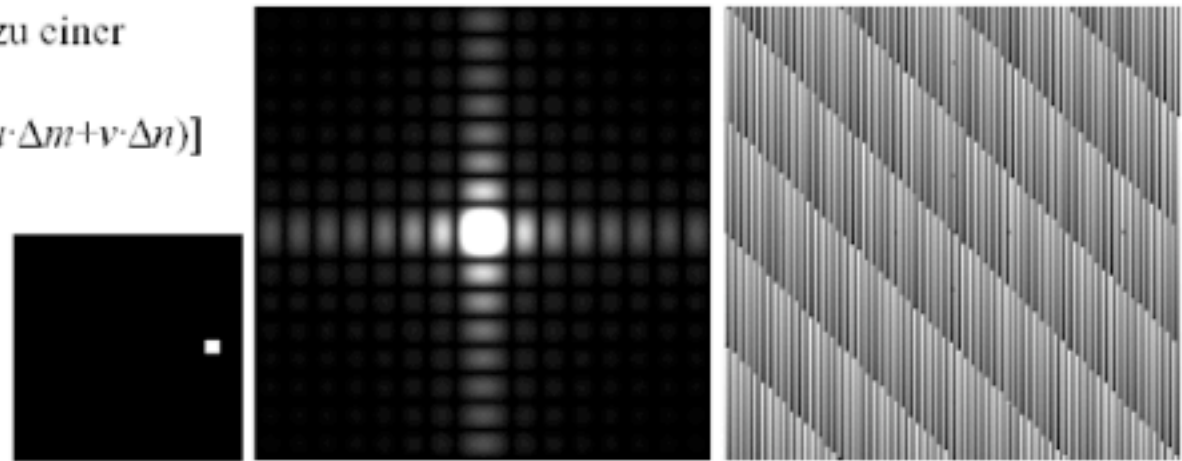


- Translation im Ortsbereich führt zu einer Translation der zusammensetzenden Wellen.
- Umfang der Translation hängt vom Unterschied zwischen Wellenrichtung  $(u, v)$  und Translationsrichtung  $(\Delta x, \Delta y)$  ab.
- Im Frequenzbereich bedeutet die Translation eine Phasenverschiebung.

# Translation (Beispiel)



Translation um  $(\Delta m, \Delta n)$  führt zu einer  
Phasenverschiebung  
 $F'(u,v) = F(u,v) \cdot \exp[-i \cdot 2\pi/N \cdot (u \cdot \Delta m + v \cdot \Delta n)]$



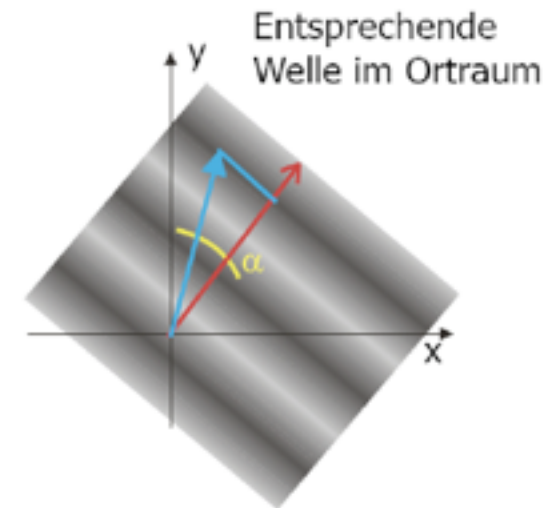
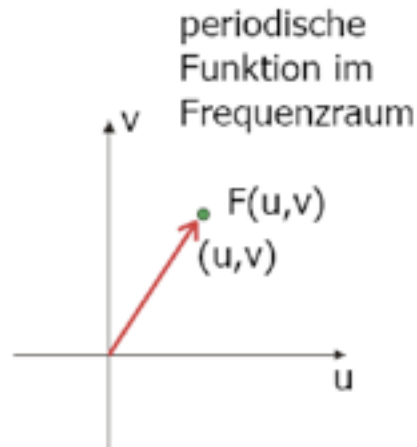
# Phasenverschiebung

$p_{u,v} = |(\Delta x, \Delta y)| \cdot \cos(\alpha) / T_{u,v}$  mit  $\cos(\alpha)$  - Winkel zwischen Wellenrichtung und Richtung von  $(\Delta x, \Delta y)$   
 $T_{u,v}$  - Wellenlänge =  $1/\text{Frequenz}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle (\Delta x, \Delta y), (u, v) \rangle}{|(\Delta x, \Delta y)| \cdot |(u, v)|}$$

$$T_{u,v} = N/2\pi \cdot |(u, v)|$$

$$\Rightarrow p_{u,v} = \exp(i \cdot 2\pi/N \cdot (u\Delta x + v\Delta y))$$



Rotation:  $F(u,v)$  wird in gleicher Weise rotiert wie  $f(m,n)$ .



# Periodizität und Symmetrie

- Für ein- und zweidimensionale Funktionen mit  $M$  bzw.  $M$  und  $N$  Werten gilt:
  - $F(u) = F(u+M), f(m)=f(m+M)$
  - $F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$
  - $f(m,n) = f(m+M,n) = f(m,n+N) = f(m+M,n+N)$
- Für reellwertige Funktionen  $f$  gilt für die Fouriertransformierte:
  - $F(u) = *F(-u)$
  - $F(u,v) = *F(-u,-v)$(reduziert die zu berechnenden Werte um die Hälfte)  
*\*x=a-ib* ist die **komplex-konjugierte** der komplexen Zahl  $a=a+ib$ .



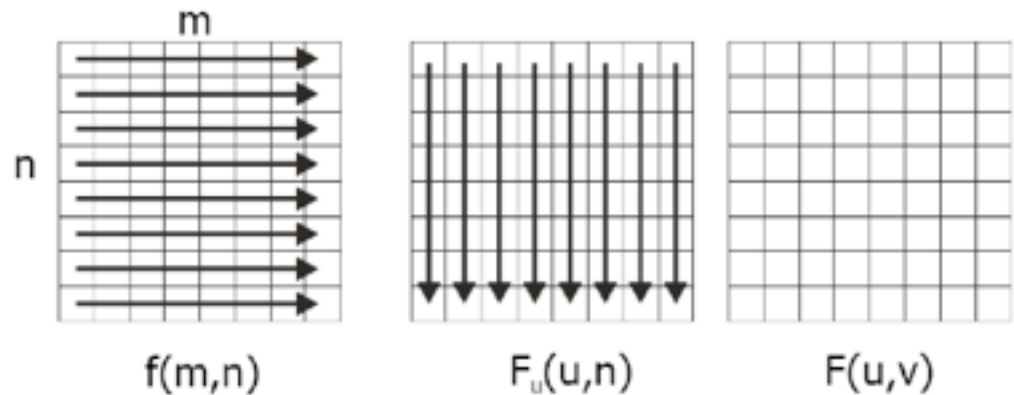
# Separabilität

Die Fouriertransformation ist **separabel**, d.h., sie kann zunächst in M-Richtung und anschließend auf diesen Zwischenergebnissen in N-Richtung ausgeführt werden.

$$\begin{aligned} F(u,v) &= 1/N^2 \cdot \sum_v \sum_\mu f(m,n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot (um+vn)/N) \\ &= 1/N^2 \cdot \sum_v \sum_\mu f(m,n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot um/N) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N) \\ &= 1/N^2 \cdot \sum_v \left[ \sum_\mu f(m,n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot um/N) \right] \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N) \\ &= 1/N^2 \cdot \sum_v F_u(m,n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N) \end{aligned}$$

kann aus der inneren Summe ausgeklammert werden.

Reduziert den Berechnungsaufwand von  $O(N^4)$  auf  $O(N^3)$ .





# Konvolution und Korrelation

1	0	-1	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	0	0
1	0	-1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

	1	2	0	-2	-1	
	2	2	0	-2	-2	
	3	2	0	-2	-3	
	3	2	0	-2	-3	
	2	2	0	-2	-2	

Worst case Aufwand im Ortsraum:  $N^4$  für Kantenlänge  $N$  des Bildes

# Konvolution und Korrelation

- Konvolution und Korrelation sind zwei eng verwandte Filter-Operationen.
- Beide können im Ortsraum und im Frequenzraum ausgeführt werden.
- Die Operation im Frequenzraum ist eine einfache Multiplikation (Aufwand  $N^2$ ).

# Konvolution im Frequenzraum

$$F(u) \cdot H(u)$$

$$= \sum_k f(k) \cdot \exp(-i2\pi uk/N) \cdot \sum_m h(m) \cdot \exp(-i2\pi um/N)$$

$$= \sum_m \sum_k [f(k) \cdot \exp(-i2\pi uk/N) \cdot h(m) \cdot \exp(-i2\pi um/N)]$$

$$= \sum_m \sum_k [f(k) \cdot h(m) \cdot \exp(-i2\pi uk/N) \cdot \exp(-i2\pi um/N)]$$

(Verschiebeeigenschaft  $h(m) \cdot \exp(-i2\pi uk/N) = h(m-k)$ )

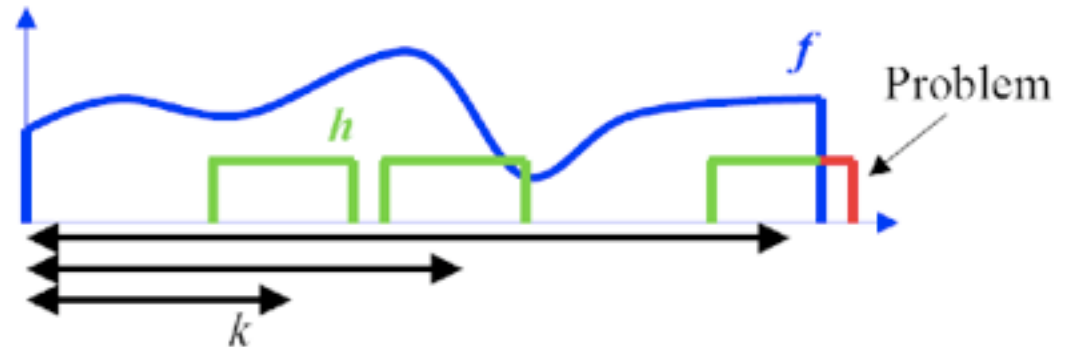
$$= \sum_m \sum_k f(k) \cdot h(m-k) \cdot \exp(-i2\pi um/N)$$

$$= \sum_m [\sum_k f(k) \cdot h(m-k)] \cdot \exp(-i2\pi um/N)$$

$$= \mathbf{FT}[\sum_k f(k) \cdot h(m-k)] = \mathbf{FT}[[f^*h](m)]$$

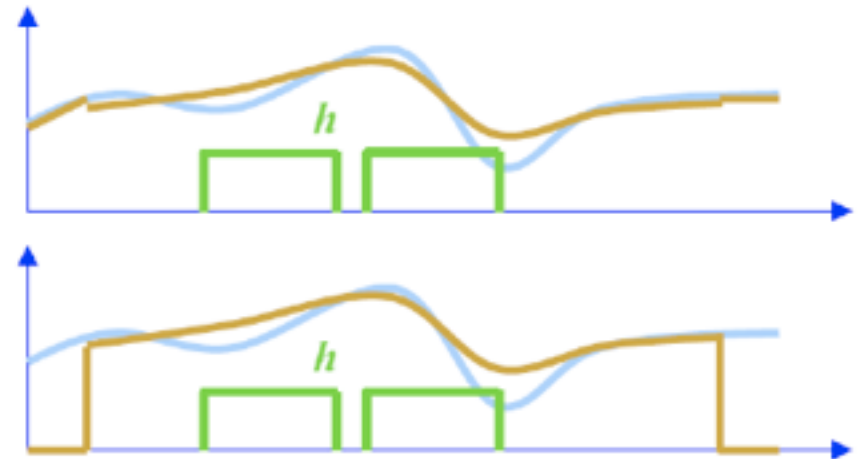
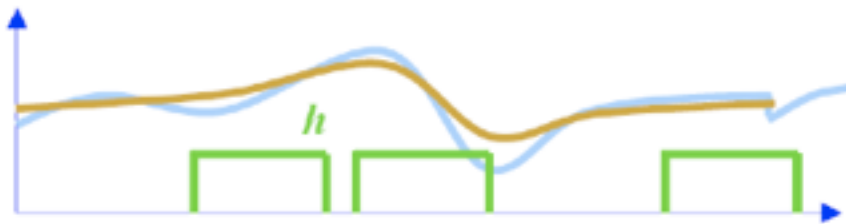
# Konvolutionskern

- Konvolution (1D):  $[f * h](m) = \sum_{k=-\infty, \infty} f(k) \cdot h(m-k)$
- Die meisten Konvolutionsfunktionen  $h$  sind nur in einem kleinen Intervall von Null verschieden (Konvolutionskern).
- Mit  $h(n) \neq 0$  für  $-K \leq n \leq K$  ist:  $[f * h](m) = \sum_{k=-K, K} f(k) \cdot h(m-k)$ .
- Problem: **Rand** von  $f$ .



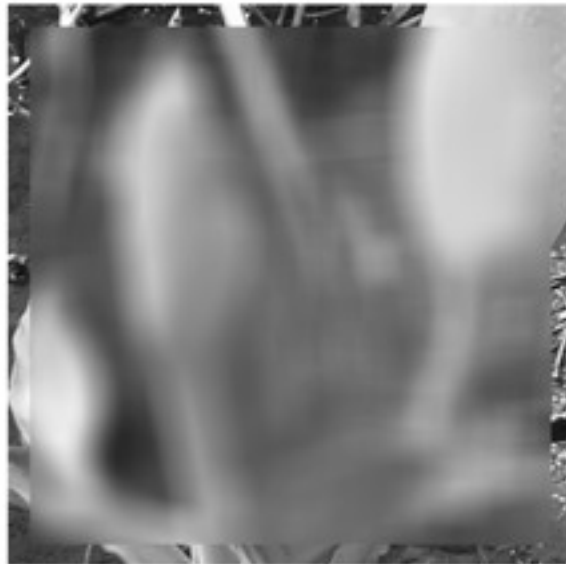
# Konvolution am Bildrand

- Lösung 1: periodische Fortsetzung des Bildes  
(diese Lösung wird automatisch gewählt, wenn im Frequenzraum multipliziert wird)
- Lösung 2: Rand ist undefiniert
  - Beibehaltung des ursprünglichen Resultats
  - Löschen der Randwerte





# Konvolution am Bildrand



# Diskrete Kosinustransformation (DCT)

- Zerlegung in Wellen unterschiedlicher Frequenz.
- Sehr ähnlich zur Fouriertransformation.
- Basisfunktionen sind reell.
- Wird vor allem bei Kompressionsverfahren verwendet(JPEG).
- ***Wie lassen sich genügend reellwertige Basisfunktionen finden?***

# Basisfunktionen der DCT

$$C(u, v) = \alpha(u)\alpha(v) \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cos\left(\frac{(2m+1)u\pi}{2M}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)v\pi}{2N}\right)$$

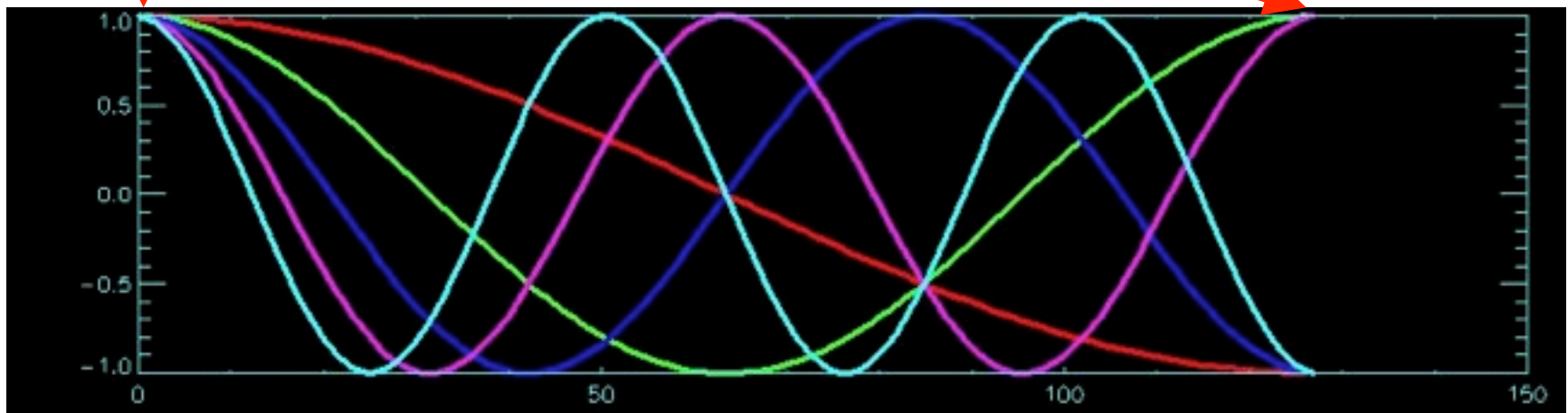
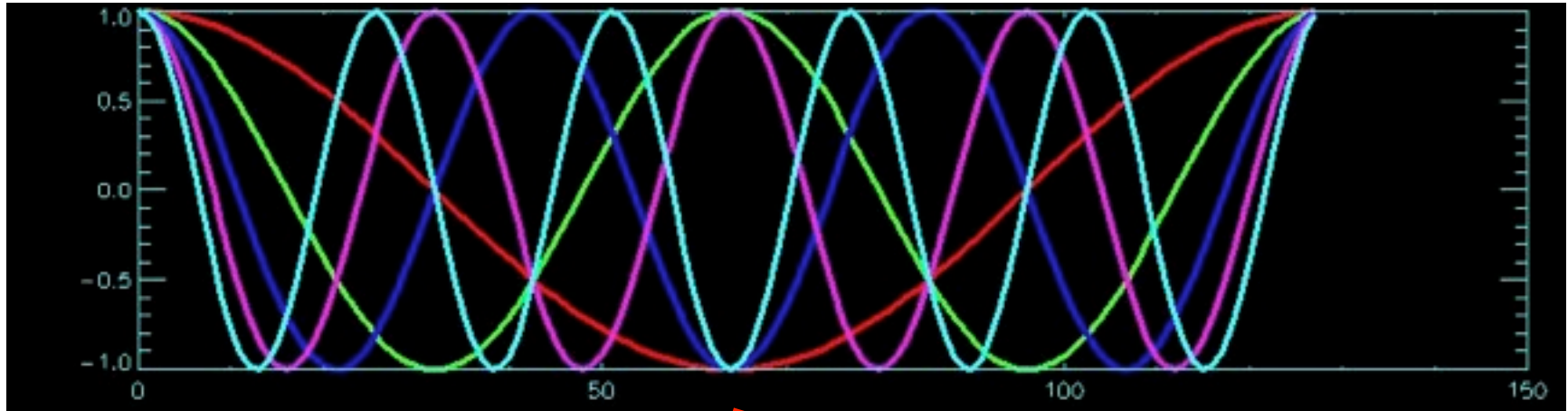
$$f(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \alpha(u)\alpha(v) C(u, v) \cos\left(\frac{(2u+1)m\pi}{2M}\right) \cos\left(\frac{(2v+1)n\pi}{2N}\right)$$

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{1/M} & , \text{für } u = 0 \\ \sqrt{2/M} & , \text{für } u \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \alpha(v) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & , \text{für } v = 0 \\ \sqrt{2/N} & , \text{für } v \neq 0 \end{cases}$$

- Basisfunktionen sind Wellen, deren Wert für jede zweite Frequenz  $u$  am Anfang und am Ende des Intervalls unterschiedliches Vorzeichen haben.



# Basisfunktionen der DCT



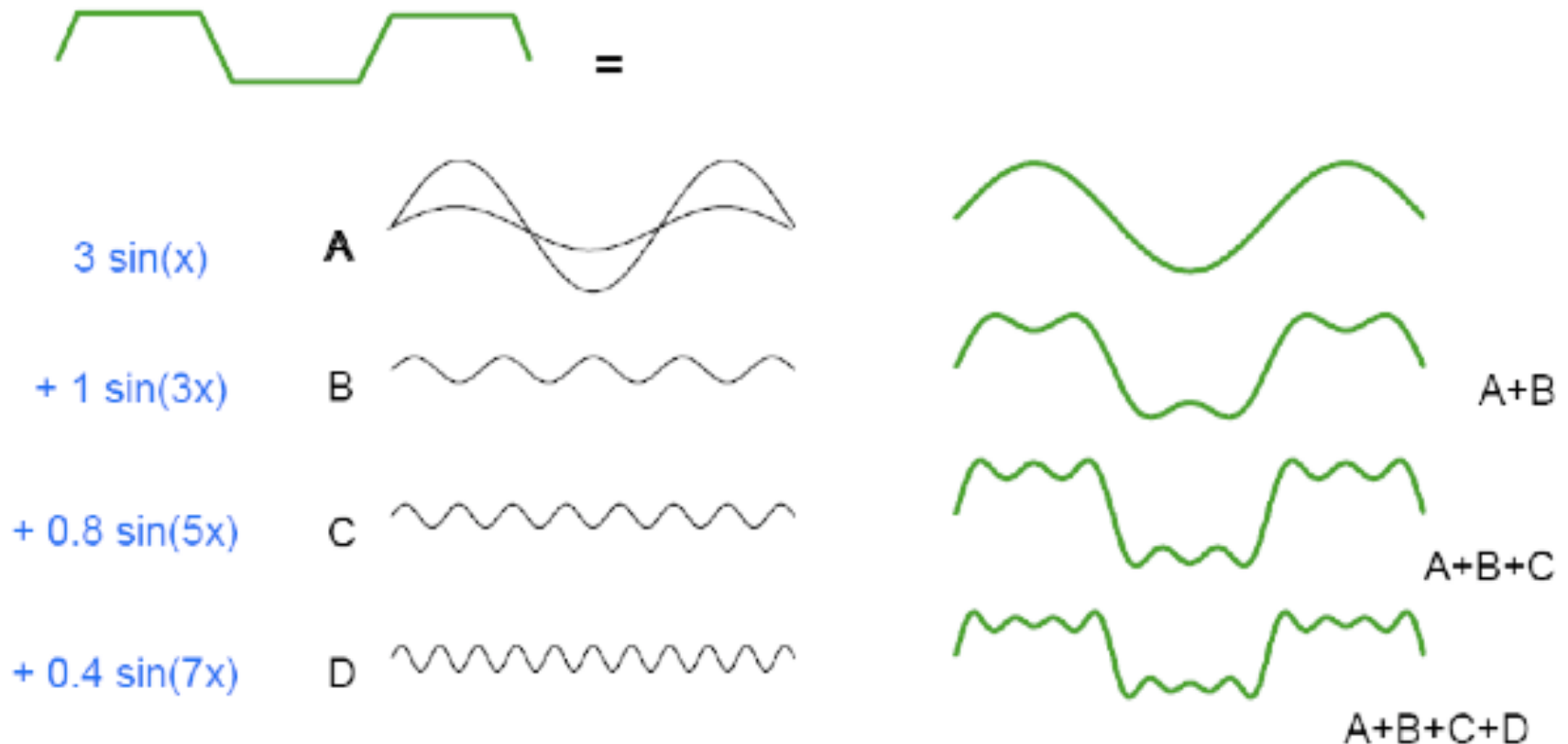
# Literatur

- Klaus D. Tönnies: "Grundlagen der Bildverarbeitung", ISBN 3-8273-7155-4
- (daraus auch viele Abbildungen der heutigen Vorlesung)

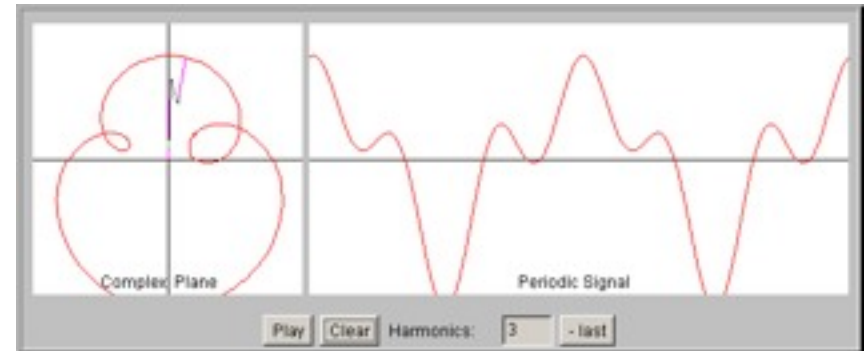
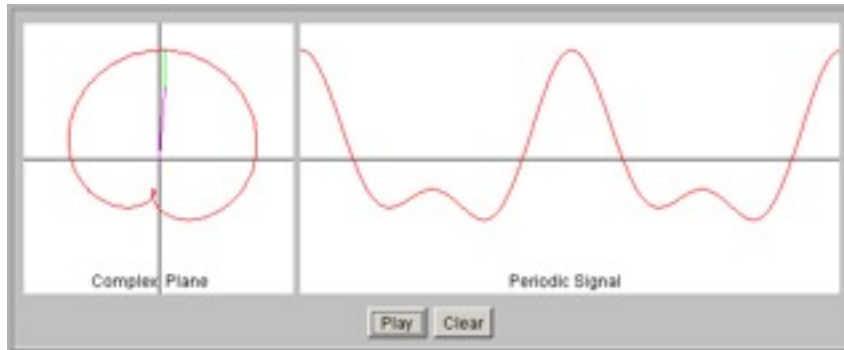
# FFT und Anwendungen der Fouriertransformation

# Fouriertransformation: Grundidee

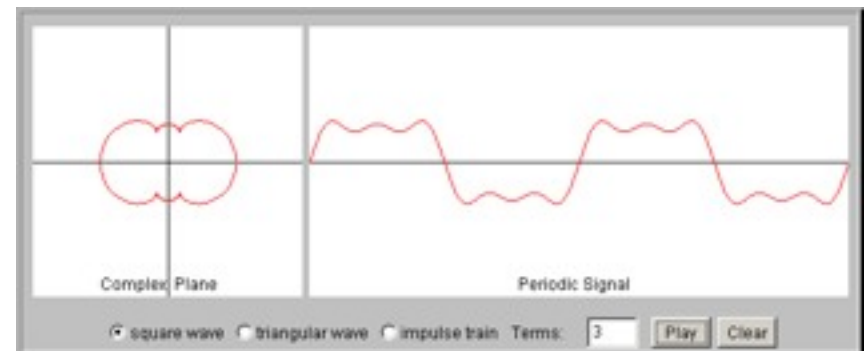
- Beschreibe beliebige Funktion als gewichtete Summe periodischer Grundfunktionen (Basisfunktionen) mit untersch. Frequenz



# Überlagerung von Schwingungen: anschaulich

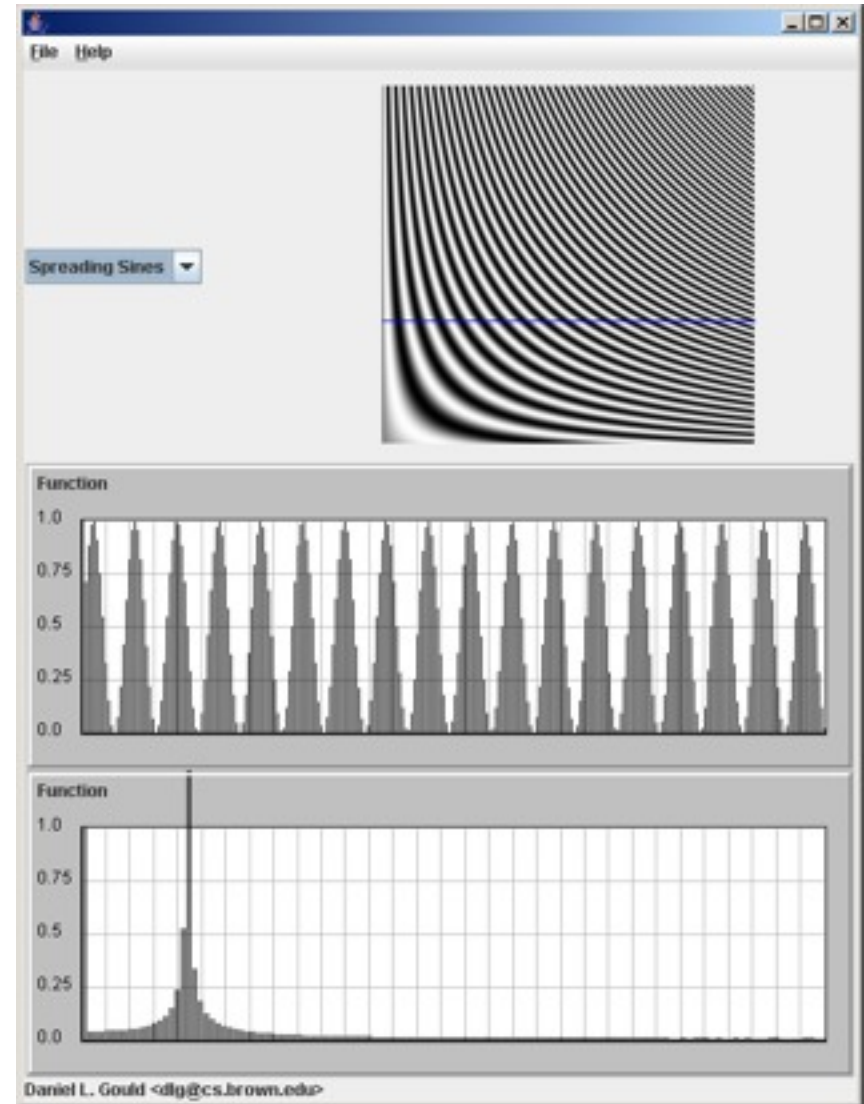


<http://www.jhu.edu/~signals/index.html>



# Fourier Transformation zum Anschauen

- <http://www.cs.brown.edu/exploratories/>



# Fast Fourier Transformation

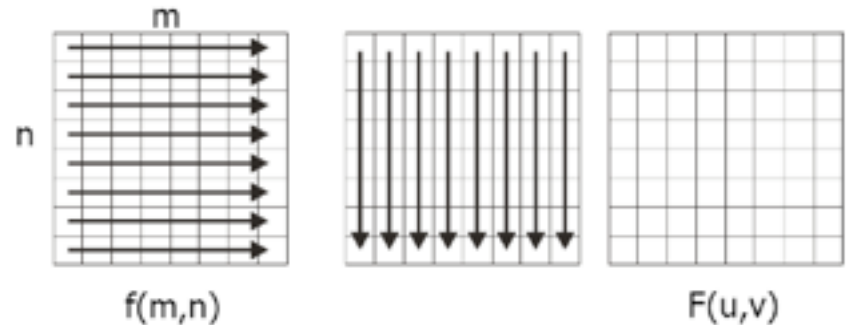
# Vorgehensweise generell

- Vereinfachende Annahme:  $N=2^k$ ,  $k>1$
- Nutze Separabilität, um 2D-FT auf 1D zurückzuführen ( $O(n^4) \rightarrow O(n^3)$ )
- Teile Summe in zwei Teilsummen auf
- Finde Gemeinsamkeiten in den Teilsummen und berechne beide Teilsummen miteinander
- Betrachte die Teilsumme und unterteile rekursiv bis  $N=1$  ( $O(n^3) \rightarrow O(n^2 \log n)$ )



# Separabilität

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} (um + vn) \right] = \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} vn \right] = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} vn \right] \right) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} vn \right] \right) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} um \right] F_u(m)
 \end{aligned}$$



- Vorgehensweise:  $F_u(m)$  für alle Spalten  $m$  berechnen und dann bei den Zeilen verwenden.

# Divide Schritt

- Teile Summe in zwei Teilsummen auf

$$N = 2K, W_N = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N}\right)$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)(W_N)^{un} = \frac{1}{2K} \sum_{n=0}^{2K-1} f(n)(W_{2K})^{un} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_{2K})^{2nu} + \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_{2K})^{(2n+1)u} \right) \end{aligned}$$

- Finde Gemeinsamkeiten in den Teilsummen

$$F_{\text{even}}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_{2K})^{2nu}, F_{\text{odd}}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_{2K})^{2nu}$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \left( F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u)(W_{2K})^u \right)$$

# Ausnutzen der Periodizität

$$(W_K)^{u+N} = (W_K)^u, (W_{2K})^{u+K} = -(W_{2K})^u$$

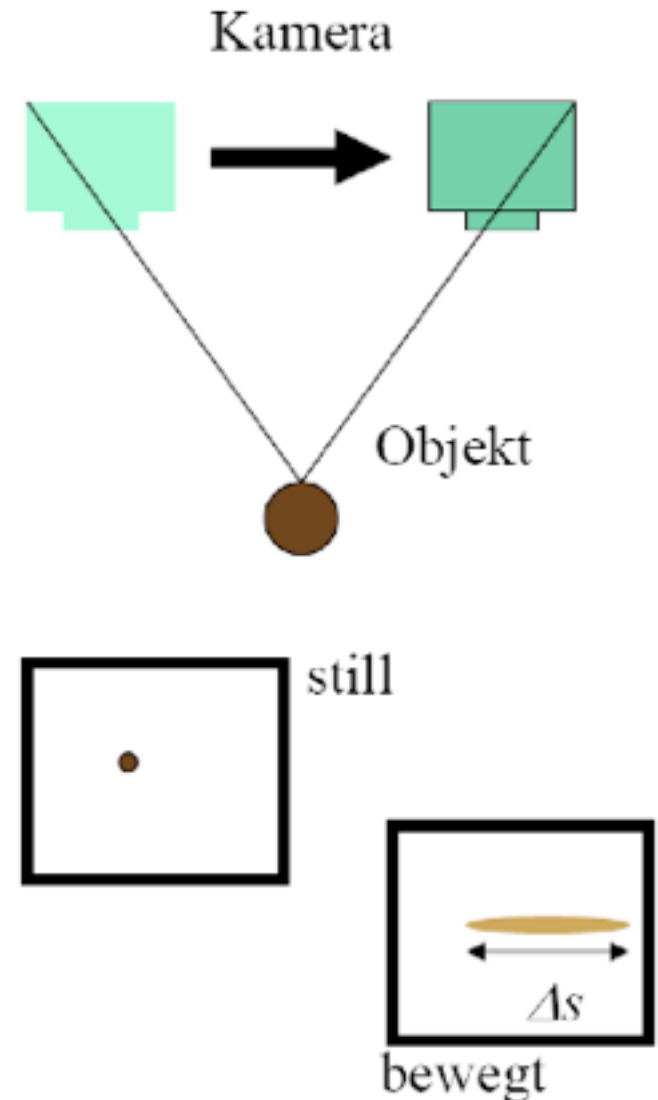
$$\begin{aligned} F(u+K) &= \frac{1}{2} \left( F_{\text{even}}(u+K) + F_{\text{odd}}(u+K) (W_{2K})^u \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u) (W_{2K})^u \right) \end{aligned}$$

- Also kann man  $F(u+K)$  mithilfe  $F(u)$  berechnen (einmal  $F_{\text{even}} + F_{\text{odd}}$ , einmal  $F_{\text{even}} - F_{\text{odd}}$ )
- Betrachte die Teilsumme  $[0 \dots K-1]$  und unterteile rekursiv bis  $K=1$  ( $O(n^3) \rightarrow O(n^2 \log n)$ )

# Restoration linearer Bildstörungen

# Beispiel I: Bewegungsunschärfe

- Über einen Zeitraum  $\Delta t$  wird ein Objektpunkt  $p$  auf immer andere Punkte auf dem CCD-Chip abgebildet.
- Bei unbewegter Kamera sei die Bildhelligkeit des abgebildeten Punkts  $h$ .
- Dann ist sie bei bewegter Kamera  $h/\Delta s$ , wobei  $\Delta s$  die zurückgelegte Strecke ist.
- Wenn  $\Delta s$  für alle Punkte gleich ist, dann lässt sich die Veränderung durch eine Faltung beschreiben.



# Bewegungsunschärfe

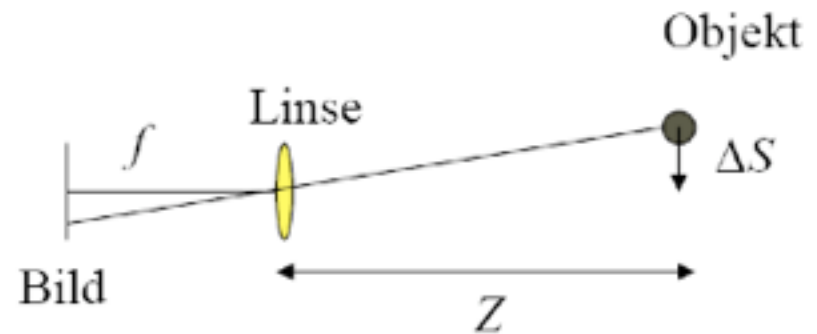
- Faltungskern ist eine Funktion  $w$  mit

$$w(t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta s} & \left| \frac{t}{2} \right| < \Delta s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

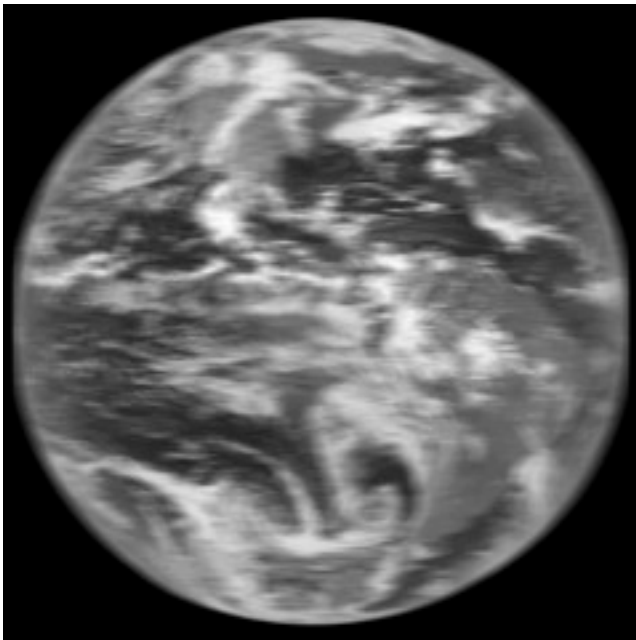
- Der Winkel  $\alpha$  gibt die Bewegungsrichtung an.
- Die Strecke  $\Delta s$  gibt die Strecke an, um die sich der Punkt bewegt hat:

$$\Delta s = \frac{f}{Z} \cdot \frac{\Delta S}{p}$$

- $f$ : Brennweite
- $Z$ : Objektabstand
- $\Delta S$ : Bewegung in der  $X$ - $Y$ -Ebene
- $P$ : Pixelgröße

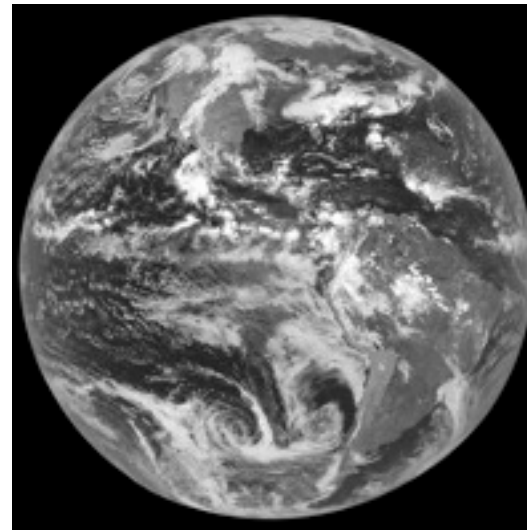


# Bewegungsunschärfe



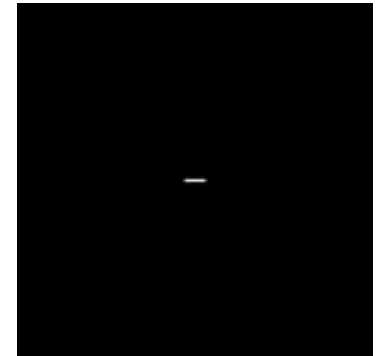
Gestörtes Bild

=



Original

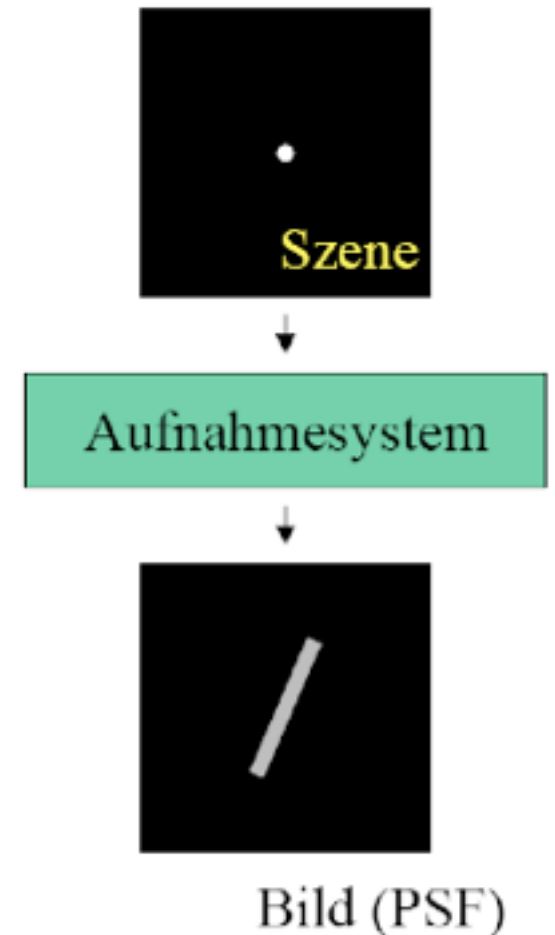
\*



Faltungskern

# Repräsentation linearer Störungen

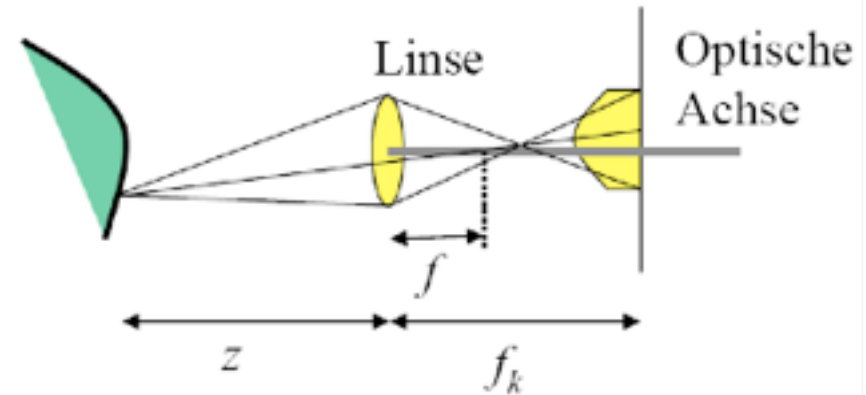
- Jede verschiebungsinvariante lineare Operation wird vollständig durch die Faltungsfunktion beschrieben.
- Die Faltungsfunktion beschreibt die Operation für beliebige Bilder
- Die Faltungsfunktion kann als Resultat der Veränderung eines Punkts erzeugt werden
- Punktantwort = Point Spread Function (PSF)





# Beispiel II: Fokussierungsunschärfe

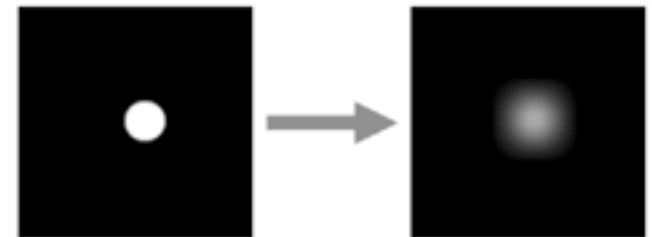
- Maß der Unschärfe hängt vom Punktabstand  $z$ , der Brennweite der Linse  $f$  und der Kammerkonstante  $f_k$  ab.



- Linsengesetz: 
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_k} \Leftrightarrow f_k = \frac{zf}{f - z}$$

- Größe des Unschärfekreises: 
$$\frac{d}{f} = \frac{s}{f_k} \Leftrightarrow s = \frac{f_k d}{f} = \frac{zd}{f - z}$$

- Unschärfe kann durch Aufnahme eines punktförmigen Testobjekts angenähert werden.



# Fokussierungsunschärfe



Wie kann die Störung rückgängig gemacht werden?

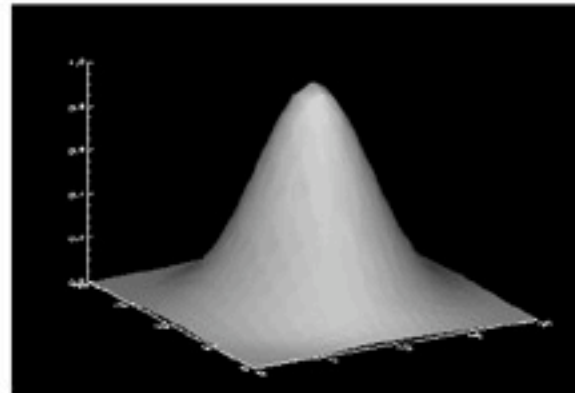
# Bildrestauration

- Ziel: Korrektur des Bildsignals um bekannte und unbekannte Störungen
- Annahme: Störung kann durch einen verschiebungsinvarianten linearen Operator  $h$  beschrieben werden.
- $g(x,y) \rightarrow$  (Störung durch PSF  $h$ )  $\rightarrow g'(x,y)$
- $g'(x,y) = [h^*g](x,y)$
- PSF beschreibt die Störung  $\rightarrow$  **Wie kann die PSF bestimmt werden?**

# Gesucht: PSF

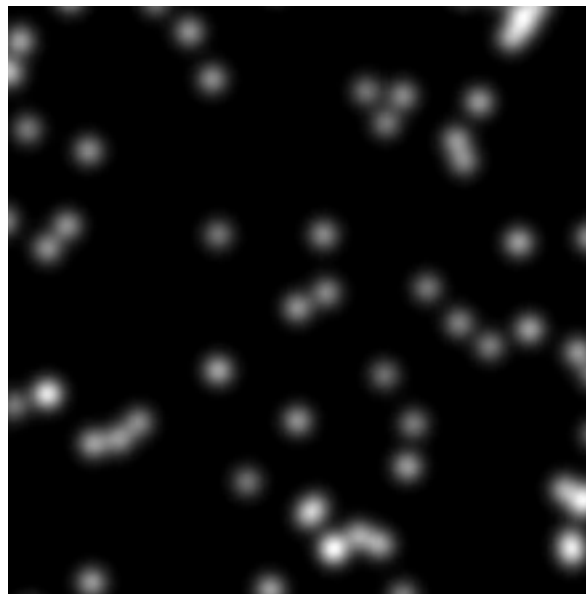


Gesucht:



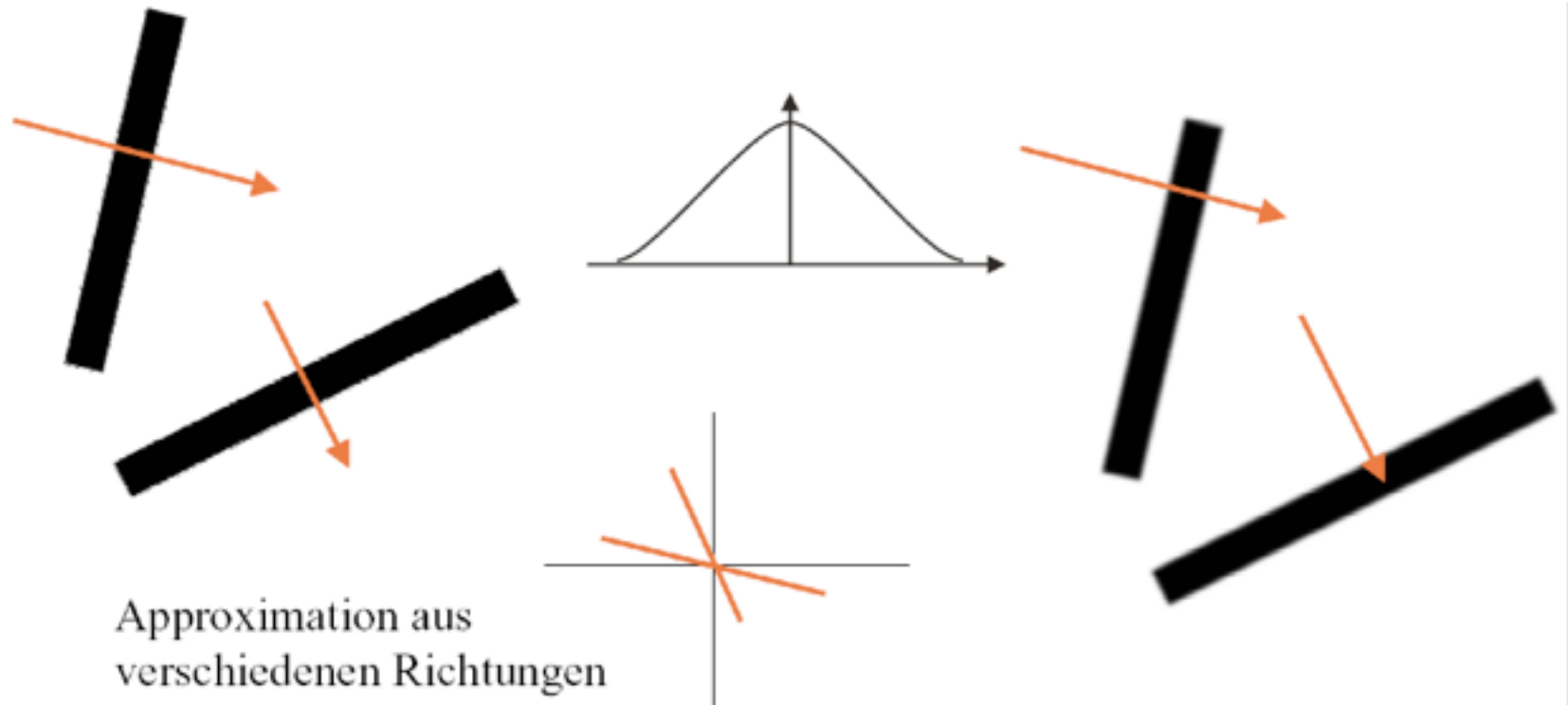
PSF

# PSF von Testbildern



- Annahme: Störung ist unveränderlich und Testaufnahme ist möglich.
- Durch die Aufnahme eines punktförmigen Objekts kann ein  $\delta$ -Impuls approximiert werden.
- Aufnahme ist eine Näherung für die PSF.

# PSF aus dem aufgenommenen Bild



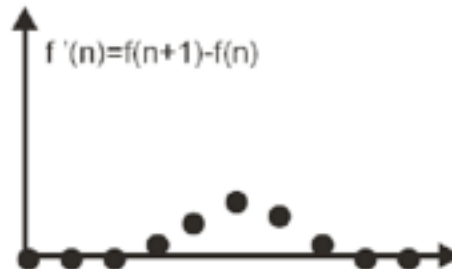
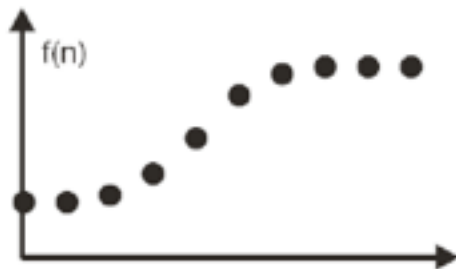
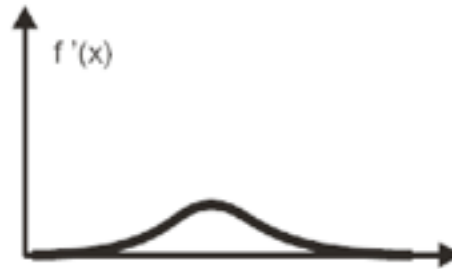
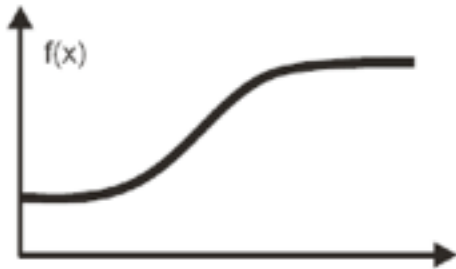
- Testaufnahme ist nicht möglich: Näherungsweise Bestimmung der PSF durch Betrachtung von Punkten oder Linien im gestörten Bild.

# Kanten

- Die meisten Bilder weisen wenige Linien oder Punkte auf, aber Kanten können in fast jedem Bild gefunden werden.



# 1D-Kanten



Die **Stärke einer Kante** hängt von der Steigung der Funktion ab:

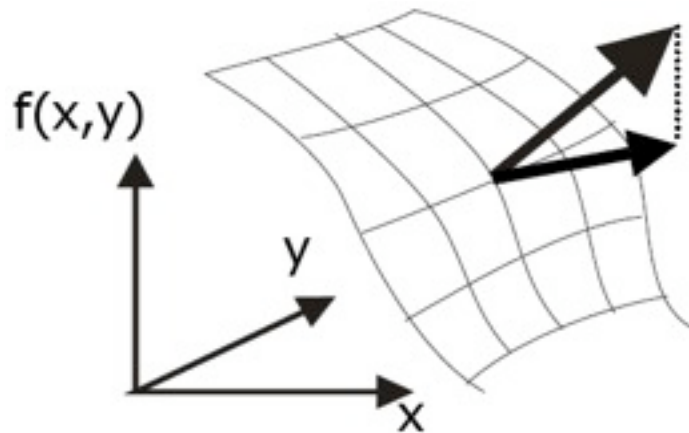
Betrag der ersten Ableitung bestimmen.

Für **diskrete Funktionen**:

Ableitung wird durch Differenz angenähert



# Kanten im 2D-Raum: Gradienten



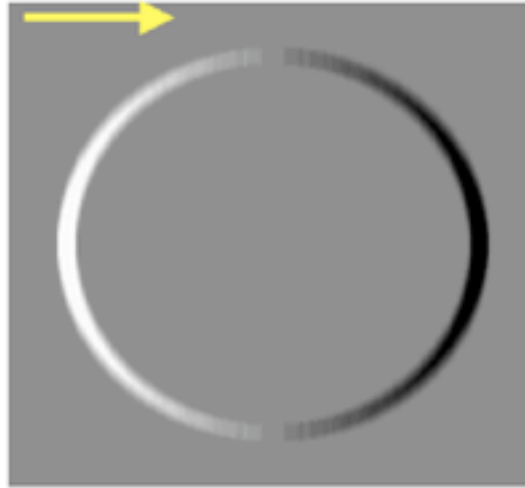
**Richtung:** Richtung der größten Steigung.

**Länge:** Stärke der stärksten Steigung.

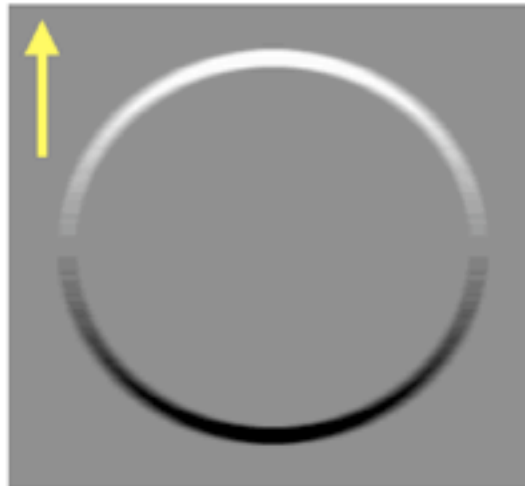
- Gradient im kontinuierlichen Raum  $(x, y)$ : Vektor der partiellen Ableitungen der Bildfunktion in  $x$ - und  $y$ -Richtung:  $\vec{G}(f) = (\partial f / \partial x \quad \partial f / \partial y)$
- Approximation des Gradienten: Differential wird durch Differenz approximiert:

$$\vec{G}(f)(m, n) \approx [G_x(m, n) \quad G_y(m, n)] = [f(m, n) - f(m-1, n) \quad f(m, n) - f(m, n-1)]$$

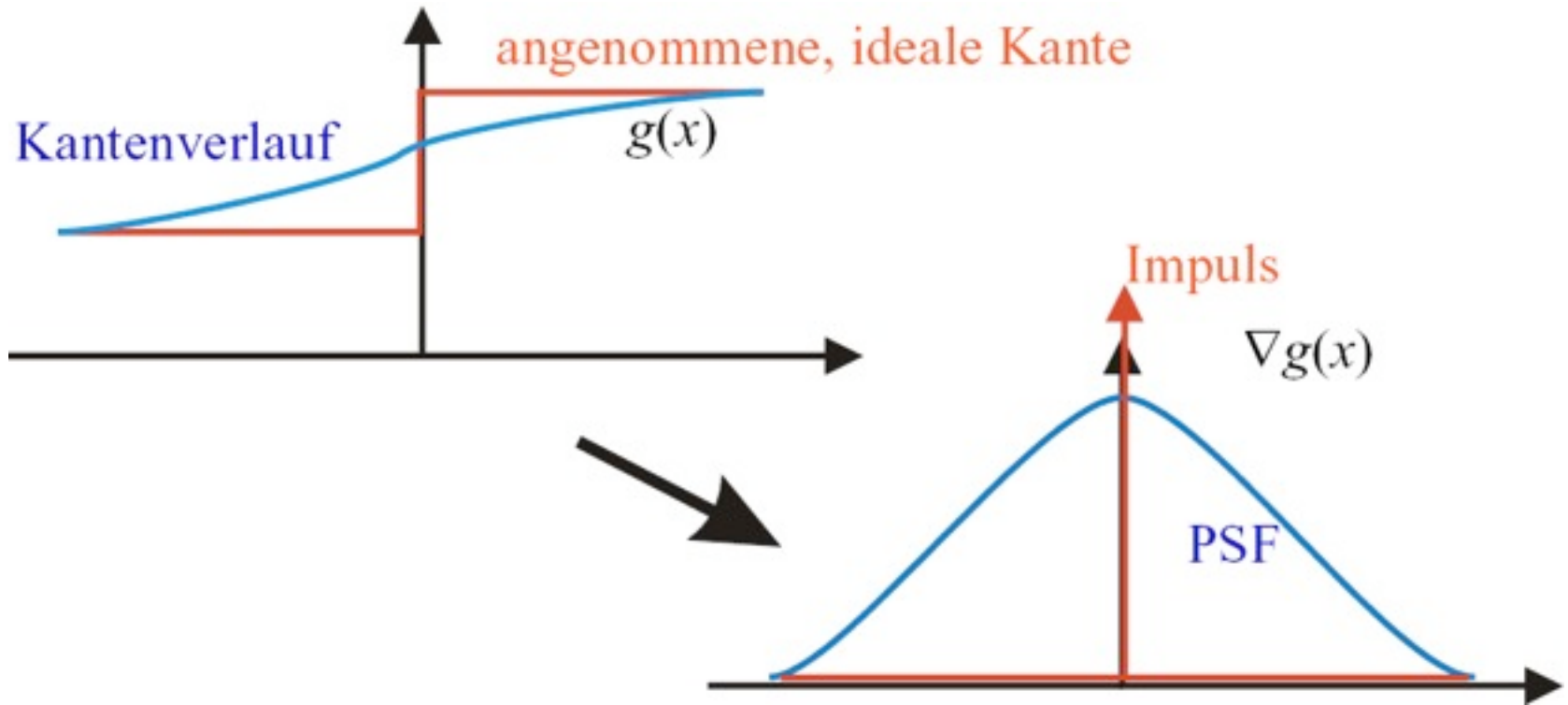
# Elemente des Gradienten



Betrag :  $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$   
Richtung:  $\tan^{-1}(G_y/G_x)$



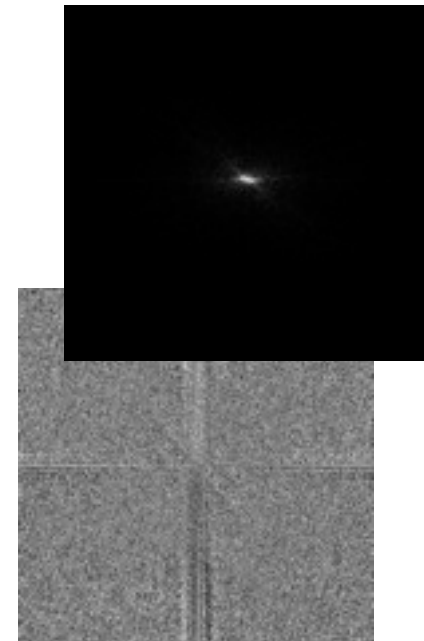
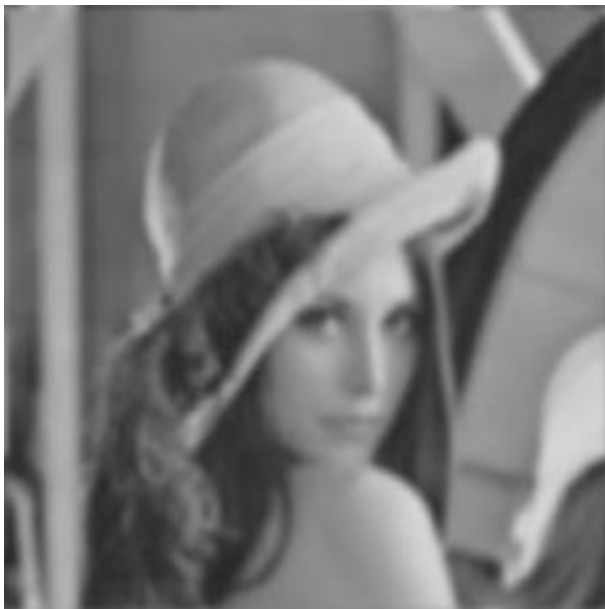
# PSF aus Kanten



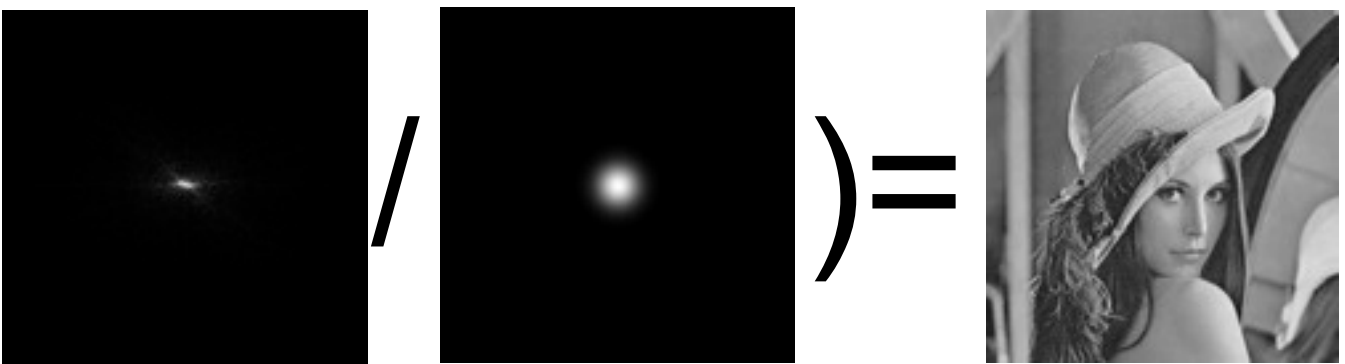
- PSF kann auch aus dem Verlauf einer als ideal angenommenen Kante approximiert werden.

# Invertierung der Störung

- Überführung der Repräsentation in den Frequenzraum:
- $G'(u,v) = \text{FT}[g'(m,n)] = \text{FT}[[h^*g](m,n)] = H(u,v) \cdot G(u,v)$
- Invertierung:
- $g(m,n) = \text{FT}^{-1}[G'(u,v)/H(u,v)]$  (**Inverse Filterung**)

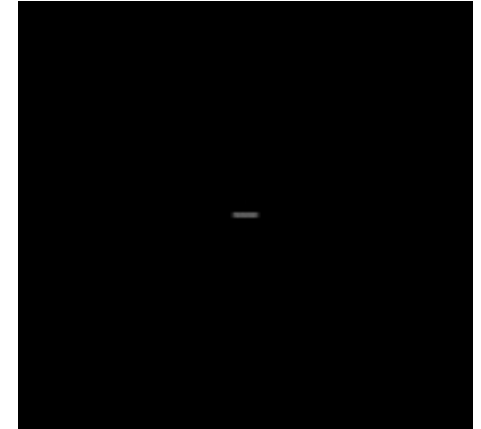


# Inverse Filterung

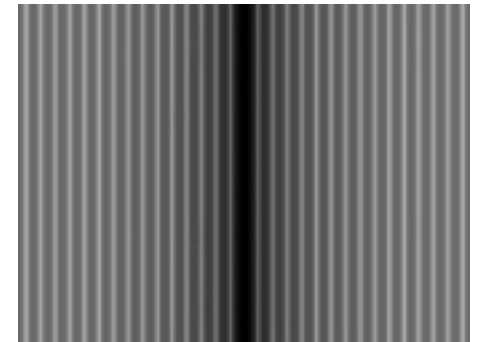
$$FT^{-1} \left( \frac{\text{[Distorted Image Spectrum]}}{\text{[Filter Spectrum]}} \right) = \text{[Original Image]}$$
The diagram illustrates the process of inverse filtering. It features the mathematical expression  $FT^{-1} \left( \frac{\text{[Distorted Image Spectrum]}}{\text{[Filter Spectrum]}} \right) = \text{[Original Image]}$ . The first square in the fraction represents the distorted image spectrum, showing a central bright spot with a surrounding blur. The second square represents the filter spectrum, which is a smooth, bell-shaped curve centered on the same spot. The result of the inverse Fourier transform is a grayscale image of a woman wearing a hat, which is the original image.

- Theoretisch: vollständige Rückgewinnung der Information aus den gestörten Daten

# Bewegungsunschärfe



PSF



FT(PSF)

# Bewegungsunschärfe



Resultat der inversen Filterung  $FT^{-1} [FT (g')(u,v)/FT(PSF)(u,v)]$

# Numerische Probleme bei der inversen Filterung

$$g = h * f \Rightarrow f(m, n) = FT^{-1} \left( \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \right)$$

- Problem: Nullstellen von H
  - Treten auf, falls h als Matrix nicht den vollen Rang hat
  - Auch kleine Werte von H sind numerisch schon ein Problem
- Deswegen in der Praxis:

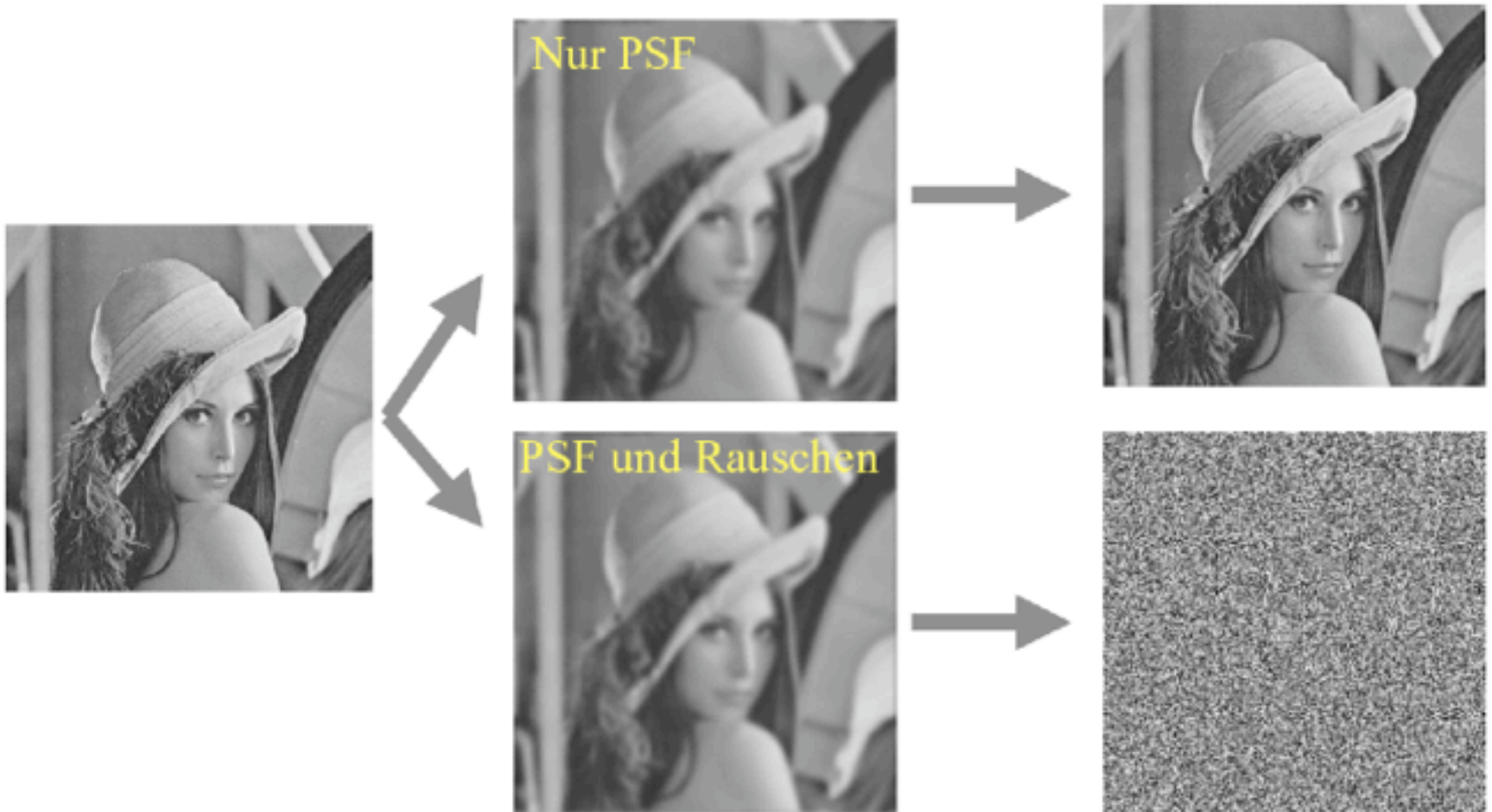
$$F(u, v) = \begin{cases} \frac{G(u, v)}{H(u, v)} & H(u, v) > H_{\min} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



# Rauschen

- Problem: Inverse Filterung geht von idealen (ungestörten) Daten aus
- In Wirklichkeit enthalten Bilddaten Rauschen
- Dieses Rauschen wird bei der inversen Filterung extrem verstärkt
- Rauschen lässt sich nicht „herausrechnen“, da es nicht wiederholbar ist

# Rauschen



# Ad-hoc Lösung

- Gewichte die Wirkung der inversen Filterung mit der Amplitude der Störungsfunktion im Verhältnis zur mittleren Amplitude

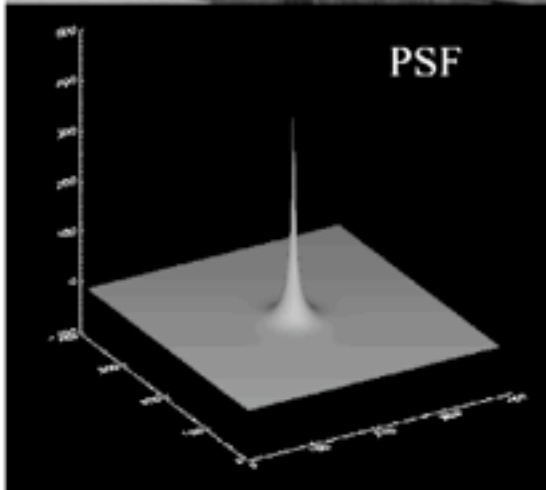
$$\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|}{A_N}$$

- Problem: Gewichtung nimmt keine Rücksicht auf die Signalstärke von F

# Wiener Filter

$$\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \left( \frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)} \right)} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + k}$$

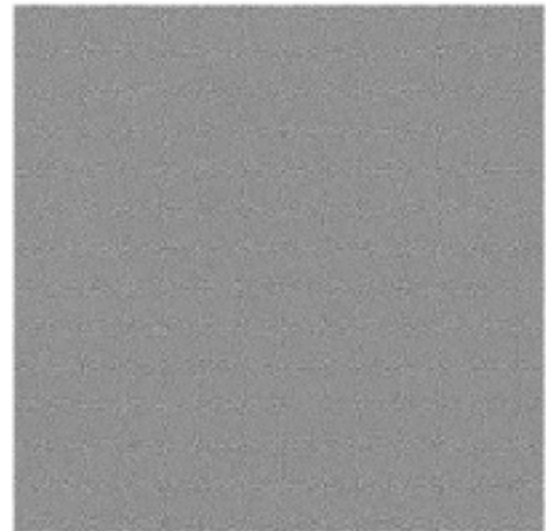
- Wobei  $S_\eta$  und  $S_f$  die Spektren des Rauschens bzw. der ungestörten Funktion sind
  - $S_\eta = 0$  (ungestört)  $\rightarrow$  perfekte inverse Filterung
- Leider ist  $S_\eta$  in der Praxis meist unbekannt
- Lösung: heuristisches Wiener Filter mit  $k$



# Beispiel



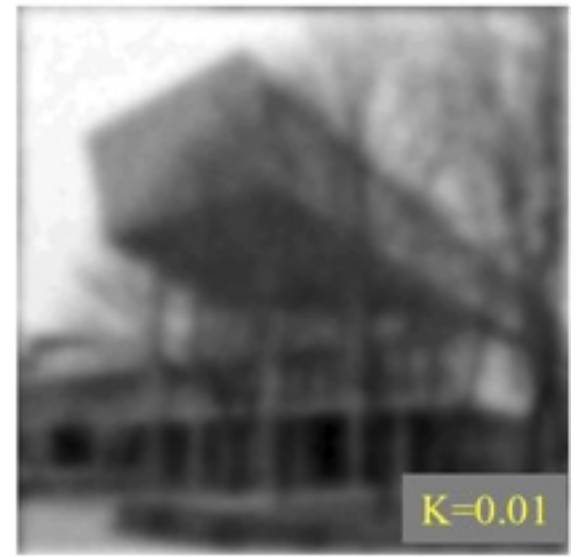
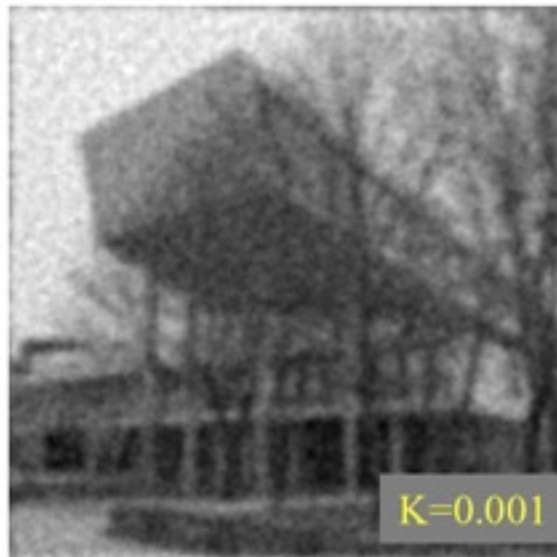
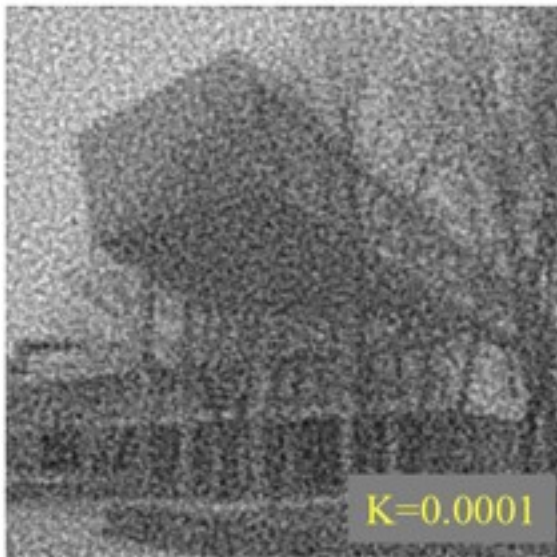
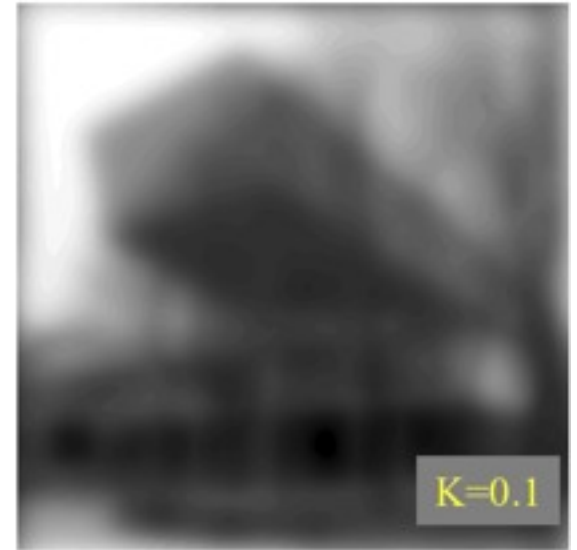
gestörtes Bild



durch Inverse Filterung „restauriert“



# (Heuristisches) Wiener Filter



# Transformation und Interpolation

# Transformation und Interpolation

- Die Transformationen Translation, Rotation und Skalierung sind auf reellen Zahlen definiert:

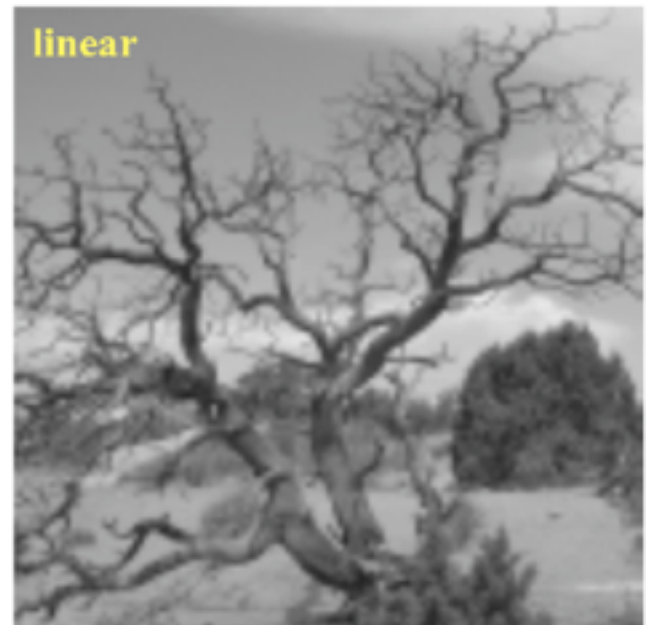
$$Rot_{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Tr_{dx,dy} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + dx \\ y + dy \end{pmatrix}, \quad Sc_s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Digitale Bilder haben einen ganzzahligen Definitionsbereich.
- Nach Transformation ist eine Interpolation notwendig.

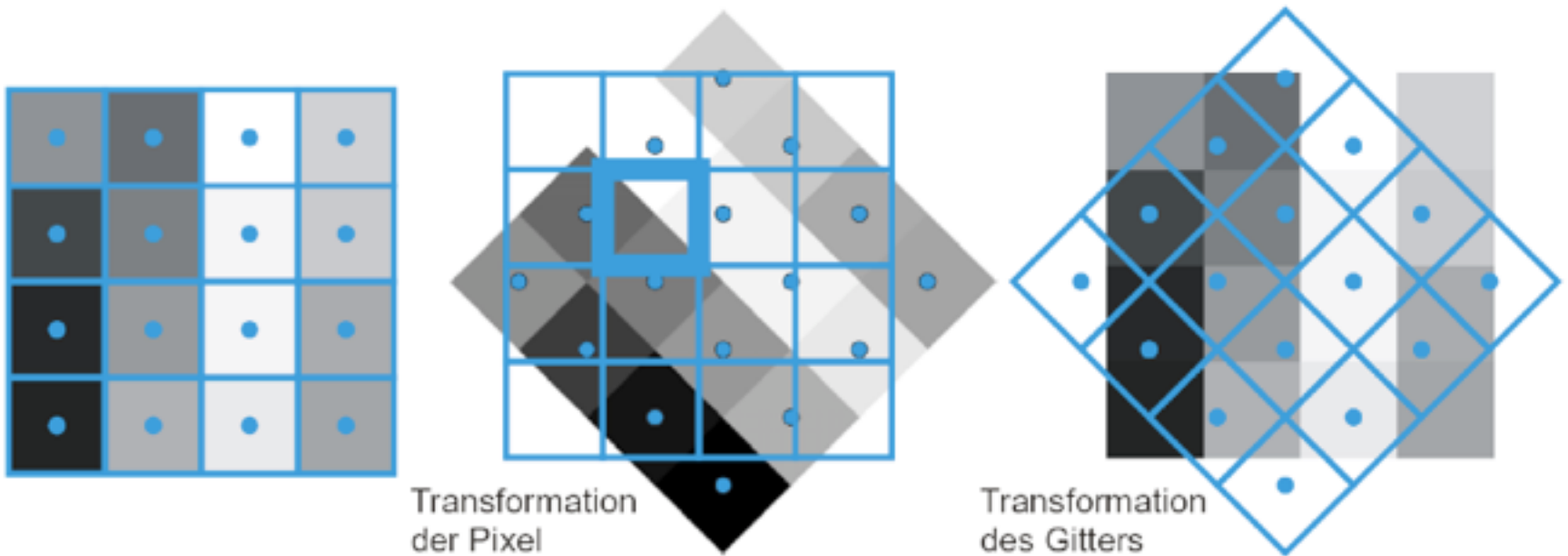


# Interpolation

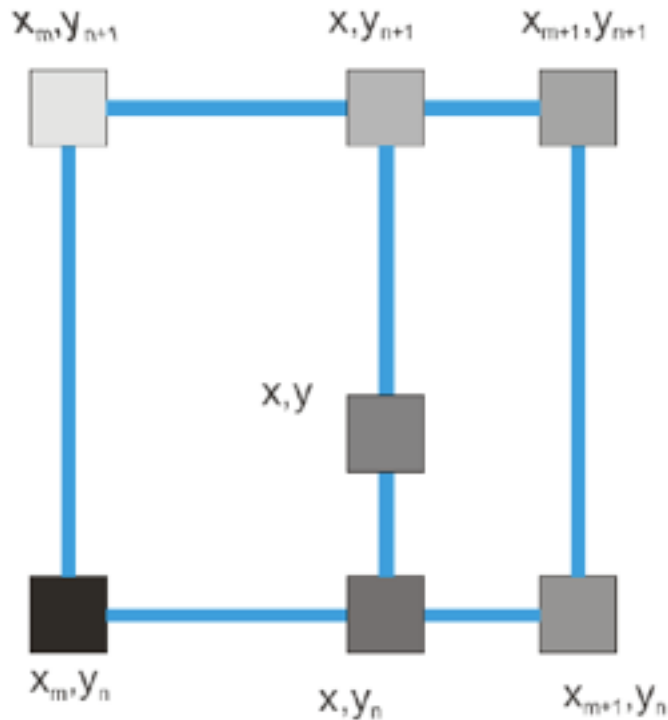
- Konstante Interpolation (Wert des nächsten Nachbarpixels)
- Lineare Interpolation
- Interpolation durch Polynome höheren Grades.
- Interpolation im Frequenzraum.



# Konstante Interpolation



# Bilineare Interpolation



Erster Schritt:

$$g_1(x_m, y) = \frac{y_{n+1} - y}{y_{n+1} - y_n} f(x_m, y_n) + \frac{y - y_n}{y_{n+1} - y_n} f(x_m, y_{n+1}),$$

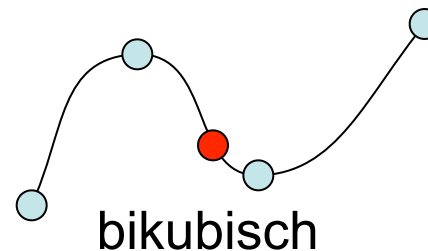
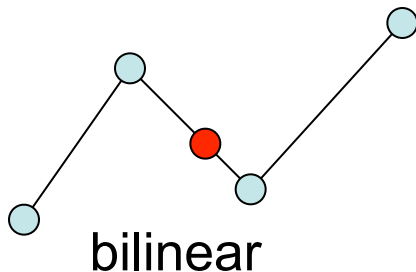
$$g_1(x_{m+1}, y) = \frac{y_{n+1} - y}{y_{n+1} - y_n} f(x_{m+1}, y_n) + \frac{y - y_n}{y_{n+1} - y_n} f(x_{m+1}, y_{n+1}).$$

Zweiter Schritt:

$$g(x, y) = \frac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m} g_1(x_m, y) + \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m} g_1(x_{m+1}, y).$$

# Polynome höheren Grades

- Interpolation der Bildfunktion durch mehr als 2 Stützpunkte
- Polynom n-ten Grades interpoliert n+1 Punkte
- Die Bildfunktion wird besser angenähert, wenn mehr Terme der Taylor-Approximation berücksichtigt werden.
- Ableitungen für die Taylor-Reihe werden durch Differenzen angenähert.
- Grad des Polynoms ist ein Kompromiss zwischen
  - steigender Anzahl berücksichtigter Terme der Taylor-Reihe.
  - steigender Ungenauigkeit der geschätzten Ableitungen.



# Interpolation im Frequenzraum

- Die Basisfunktionen der Fouriertransformation haben einen reellen Definitionsbereich.
- Ein Funktionswert kann an beliebiger Stelle  $(x,y)$  bestimmt werden durch

$$g_F(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left(i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

- Die Interpolation ist exakt, falls die ursprüngliche Funktion  $f$  bandbegrenzt ist (was die meisten Funktionen jedoch nicht sind).

# Literatur

- <http://www.jhu.edu/~signals/index.html>
- <http://www.cs.brown.edu/exploratories/>
- Klaus D. Tönnies: "Grundlagen der Bildverarbeitung", ISBN 3-8273-7155-4
- <http://www.pearson-studium.de/main/main.asp?page=booksites/selectchapter&isbn=3827371554&PSZielgruppe=Student>